DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n4p394-403

La Raison d'être des Propriétés D'opération D'addition à L'école Primaire : un Sujet Curriculaire Encore Controversé ?

The Raison d'être for Addition Operation Properties in Primary School: a Still Controversial Curriculum Topic?

Danielly Kaspary[a]; Marilena Bittar*[b]; Hamid Chaachoua: Institution[a]

[a]Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, F-38000 Grenoble, France
[b]Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. RS, Brasil.
*E-mail: danielly.kaspary@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé

Le curriculum prescrit d'une société change dans le temps pour des raisons diverses. Dans cet article, nous proposons de centrer notre attention au changement curriculaire concernant quatre propriétés d'addition (commutativité, associativité, élément neutre et clôture) à l'école primaire au Brésil. La période que nous analysons est limitée à la période 1990 - 2020. Des documents officiels sont examinés dans le but de nous apporter un regard prescripteur sur les conditions et contraintes qui doivent, selon l'État, soutenir l'étude de ce contenu à ce niveau scolaire. Dans un deuxième moment, nous proposons également d'analyser différentes versions d'une collection de manuels qui permettent d'illustrer l'évolution curriculaire au fil du temps. Des concepts de la théorie anthropologique du didactique et les notions d'objet et d'outil sous-tendent notre analyse sur la raison d'être de ces propriétés.

Mots-clés: Curriculum. Manuels. Outil/Objet. Noosphère. Champ Additif. Praxéologie

Abstract

A society's prescribed curriculum changes over time for a variety of reasons. In this article, we propose to focus our attention on the curricular change concerning four addition properties (commutativity, associativity, neutral element and closure) in primary school in Brazil. The period we are analyzing is limited from the 1990s to the present day, 2020. Official documents are examined in order to provide us with a more general view of the conditions and constraints that, according to the state, should support the study of this content at this school level. In a second moment, we also propose to analyze different versions of a collection of textbooks that illustrate curricular evolution over time. Concepts from the anthropological theory of didactics and the notions of object and tool underpin our analysis of the rationale behind these properties.

Keywords: *Curriculum. Manuals. Tool/Object. Noosphere. Additive Field. Praxeology.*

1 Introduction

Le curriculum d'une société se fait souvent un objet de contestation face aux différents moments historiques vécus par une société. Dans ce sens, au début des années 90, nous remarquons au Brésil un mouvement de dé-figement du curriculum des mathématiques à l'école primaire. Et depuis lors, de petits et grands changements peuvent être remarqués sur le curriculum prescrit au niveau national.

Les changements curriculaires résultent de débats et de jeux de pouvoir entre certaines institutions de la société (Kaspary, 2019), comme le ministère de l'Éducation et la société scientifique. Ces instituions forment ce que nous appelons *noosphère* dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

> Toute une activité ordinaire s'y déploie, en dehors même des périodes de crise (où elle s'accentue), sous forme de doctrines proposées, défendues et discutées, de production et de débats d'idées – sur ce qui pourrait être changé et sur ce qu'il convient de faire. Bref, on est ici dans la sphère où l'on pense – selon des modalités parfois fort différentes – le fonctionnement didactique. Pour cela, j'ai avancé pour elle le nom parodique de noosphère. (Chevallard, 1982, p.181).

La noosphère est, de façon résumée, l'entité qui décide et légitime le curriculum prescrit. Nous nous plaçons dans cet article dans le cas de la noosphère relative à la société brésilienne, où Kaspary (2020) a mis en évidence des changements curriculaires sur les propriétés d'addition (commutativité, associativité, élément neutre et clôture) au cours des trente dernières années. Il s'agit d'un contenu qui s'est montré vulnérable à des questionnements sur sa *raison d'être* dans ce niveau scolaire.

Si on considère que les objets d'enseignement sont des œuvres, au sens que c'est une création de l'activité humaine, ils ont une raison d'être telle que Chevallard l'a défini lors d'un séminaire en 2009:

> Par raisons d'être d'une œuvre – c'est-à-dire de tout objet créé et diffusé par l'activité humaine –, on entend l'intention qui a présidé à sa création ou à sa diffusion en telle institution, l'usage (ou les usages) que l'on compte en faire, l'utilité qu'on lui reconnaît. Les raisons d'être – et d'être là – d'une œuvre constituent la réponse à la question sans apprêt « À quoi ça sert ? » ou « En quoi cela peut-il être utile ? » En quoi est-il utile de distinguer angle saillant et angle rentrant,

> par exemple ? Bien entendu, les raisons d'être d'une œuvre dépendent en règle générale, mais dans une certaine mesure seulement, de l'institution qui lui sert d'habitat (voire de la position à l'intérieur d'une telle institution). (Chevallard, 2009, p.4).

Ainsi, si l'on considère les propriétés d'addition comme des œuvres, on propose donc d'étudier leurs raisons d'être pour rendre compte des changements curriculaires observés par Kaspary (2020). Pour identifier les raisons d'être, nous faisons recours à deux concepts que nous cherchons à articuler : *praxéologie* (Chevallard, 1999) et *outil - objet* (Douady, 1986).

Le premier concept nous permet de modéliser les activités humaines qui permettent de créer, de faire vivre ou de manipuler des œuvres. En effet, comme Chevallard (1999), nous considérons que toute activité humaine consiste à accomplir une tâche *t* d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. Le quadruplet [T/τ/θ/Θ] désigne une praxéologie, ou organisation praxéologique. On peut le distinguer en deux blocs : [T/τ] qui désigne le savoir-faire et [θ/Θ] qui désigne le savoir.

> […] structuralement, le savoir [θ/Θ] permet d'engendrer τ (pour T donné). Pour cette raison, le savoir-faire [T/τ] pourra être classiquement présenté, dans le texte du savoir, comme une simple application du « savoir » [θ/Θ]. (Chevallard, 1999, p. 229).

Ainsi, l'œuvre « propriétés d'addition » peut intervenir dans le bloc du savoir pour justifier et comprendre une technique voire même la générer. Son application peut se voir aussi dans la mise en œuvre d'une technique pour accomplir un type de tâches.

Le deuxième concept, outil-objet, permet de répondre à la question de l'utilité de l'œuvre. Dans une perspective d'ingénierie didactique, Douady (1986) a introduit la notion de dialectique outil-objet qui repose sur une hypothèse selon laquelle l'acquisition des connaissances en mathématiques se caractérise par le fait que l'élève « est capable de les faire fonctionner comme outils explicites dans des problèmes qu'il doit résoudre » (ibid, p.11). Elle définit pour un concept mathématique l'aspect outil lorsqu'on regarde son usage dans la résolution de problème et l'aspect objet lorsqu'on le considère comme « objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement » (Douady, 1986 p. 9). En reprenant cette notion dans la théorie anthropologique du didactique[1] où la relativité institutionnelle des savoirs est fondamentale, nous dirons qu'une œuvre a un statut (ou regardé selon l'aspect) d'objet de savoir dans une institution lorsqu'il est pris et étudié pour lui-même et dans ses relations avec d'autres œuvres. Cela se traduit dans l'institution par la production d'un texte qui énonce, définit et nomme l'œuvre. On l'étudie en tant que tel et éventuellement dans un univers plus large. On trouve également des praxéologies qui permettent d'étudier l'aspect objet d'une œuvre donnée. Par exemple, les types de tâches « Identifier si un polynôme donné est de degré 2 » ou « Déterminer les monômes d'un polynôme donné » sont autant de types de tâches dont les praxéologies permettent de travailler la notion de polynôme selon le statut objet.

On dira qu'une œuvre a un statut d'outil au sein d'une institution lorsqu'elle peut intervenir dans une technique, soit à partir des gestes que cette œuvre convoque à faire, soit comme élément technologique qui justifie et rend intelligible la technique : « ce qu'un savoir permet de comprendre et ce qu'il permet de faire en le comprenant constitue son utilité : l'utilité d'un concept, ainsi, c'est sa capacité à outiller la pensée et l'action » (Chevallard, 2007, p. 448). Par exemple, la factorisation de polynômes peut avoir un statut d'outil dans une institution lorsqu'elle peut intervenir dans la technique de résolution des équations de degré supérieur ou égal à 2.

Dans notre étude, nous proposons donc d'identifier les raisons d'être de l'œuvre « Propriétés de l'addition » dans les changements curriculaires impulsés par la noosphère brésilienne à partir du statut outil et objet de cette œuvre dans la modélisation praxéologique.

2 Méthodologie

Notre méthodologie d'analyse est réalisée selon deux axes. Le premier s'appuie sur un ensemble de documents officiels produits par la noosphère. L'analyse porte sur le discours *officiel* relatif aux propriétés d'addition. Nous avons fait le choix de deux types de documents : les programmes produits par le Ministère de l'Éducation et les évaluations du Programme National du Manuel – PNLD.

La préhistoire du PNLD démarre en 1929, avec la création par le ministère de l'Éducation d'une institution qui avait le but de légiférer sur les politiques relatives aux manuels. Dans les années qui suivent, plusieurs changements ont eu lieu et ont abouti à la création, en 1985, du Programme Nationale du Manuel (PNLD), responsable de la qualité des manuels distribués aux institutions publiques d'enseignement. Ainsi, en 1994 la première évaluation des manuels est réalisée, ayant comme principal objectif de fournir des manuels scolaires sans erreurs conceptuelles ni préjugés. À cette fin, le ministère lance chaque année un appel à candidatures pour que les éditeurs soumettent des manuels pour l'évaluation. Les évaluations de chaque niveau scolaire ont lieu périodiquement, étant celles destinées à l'école primaire : PNLD/1994, PNLD/1996, PNLD/1998, PNLD/2000, PNLD/2004, PNLD/2007, PNLD/2010, PNLD/2013, PNLD/2016 et PNLD/2019.

À la fin d'un long processus d'évaluation, les collections

1 L'intégration de la notion outil/objet dans la théorie anthropologique du didactique a été faite dans Chaachoua et al. (2013) que nous reprenons et enrichissons dans cet article.

de manuels approuvés sont présentées dans un Guide qui contient, entre autres, la description et les critiques de chaque collection approuvée, ainsi que la grille d'évaluation utilisée par les examinateurs. Ce Guide est mis à disposition des enseignants afin de les aider à faire le choix des manuels à acquérir. Il nous servira de matériel d'analyse. Ainsi, PNLD est alors une institution intéressante pour notre étude, car elle nous offre une vision globale des manuels utilisés au Brésil dans la période étudiée. L'analyse de ces matériaux, ainsi que les documents officiels, permet d'accéder à des intentions institutionnelles de la noosphère.

Le deuxième axe de notre méthodologie se fait à travers l'analyse de différentes versions d'une collection de manuels publiées et approuvées par PNLD au cours de la même période d'analyse. Ce choix qui considère les manuels comme matériaux d'analyse des phénomènes didactiques se justifie pour au moins deux raisons. Comme Assude (1996, p.50), nous considérons que le manuel « est assez représentatif d'une moyenne pondérée à plusieurs contraintes des différents systèmes didactiques » qui mettent en œuvre le savoir, ce que ne permet pas de voir le premier axe. Une deuxième raison est pour l'étude de l'évolution du curriculum : l'accès à des réalisations effectives dans des classes est impossible et le recours à l'analyse des programmes et des manuels reste l'entrée principale pour l'étude des phénomènes didactiques (Chaachoua et Comiti, 2010).

3 Un parage sur les propriétés d'addition dans les documents officiels

Comme nous l'avons dit dans la méthodologie et dans le but d'étudier les directives qui circonscrivent la noosphère de la société brésilienne en ce qui concerne les propriétés d'addition à l'école primaire, nous proposons les matériaux d'analyse constitués des documents suivants : les Paramètres Nationaux de l'Éducation - PCN (1997), la Base Nationale Commune Curriculaire - BNCC (2017) et les résultats des évaluations de manuels réalisées par PNLD (1994, 1996, 1998, 2000, 2004, 2007, 2010, 2013, 2016, 2019).

Avant de passer à ces documents, nous consacrons un petit moment pour revisiter quelques faits de l'histoire du Brésil que nous considérons importants pour mieux comprendre les données empiriques de notre étude.

Rappelons que la Réforme des Mathématiques Modernes a eu lieu dans le monde dans les années 60. En 1994, la première évaluation des manuels au Brésil dirigée par PNLD révèle encore un fort héritage de ce mouvement dans les manuels utilisés dans le pays. À ce moment-là, les centres de recherches au niveau international constataient depuis plus de 15 ans les échecs de ce mouvement. Le fait est que cette Réforme apparaît juste avant le coup d'État qui a donné lieu en 1964 à la dictature militaire brésilienne, qui a duré jusqu'en 1985. Le Brésil a souffert d'une obscurité de réflexion et de critiques à propos de l'enseignement des Mathématiques dans les années 70 (Fiorentini, 1994), période où la Réforme se montrait déjà en faillite.

La période 1985 - 1996 a été dédiée à la recherche d'un nouveau système d'éducation brésilien (Romão, 2008), quand le Ministère de l'Éducation a mis en place la politique « Éducation pour tout le monde : chemins pour les changements » (Filgueiras, 2011). Donc, c'est au moment de la re-démocratisation que les discussions curriculaires ont été reprises.

En 1997, le Ministère de l'Éducation publie le document officiel « Paramètres Curriculaires Nationaux - PCN » pour l'école primaire au Brésil. Ce document est devenu pendant longtemps une référence pour les discussions curriculaires et même pour les productions des manuels au pays.

La prise en compte des œuvres étudiées à l'école en tant qu'outil et en tant qu'objet est remarquable dans certains passages des PCN, ainsi que l'importance accordée au processus de dialectique de ces deux statuts, comme nous le voyons dans l'extrait ci-dessous. Nous signalons que Douady (1984) est citée dans la bibliographie de ce document officiel.

> Tout au long de l'école primaire, les connaissances sur les nombres sont construites et assimilées par les élèves dans un processus dialectique, dans lequel ils interviennent comme instruments efficaces pour résoudre certains problèmes et comme objets qui seront étudiés, compte tenu de leurs propriétés, de leurs relations et de leur configuration historique. (Brasil, 1997, p. 39, traduction propre).

Parmi les quatre propriétés retenues dans notre article, seulement la commutativité et l'associativité sont explicitement commentées. Les propriétés de l'élément neutre et de la clôture y sont-elles arbitrairement déconsidérées ?

L'identification des propriétés et le développement de procédures des calculs basés sur cette identification font partie des objectifs du domaine « Nombres et Opérations ». Le double statut des propriétés est donc pris en compte, ainsi que d'autres éléments didactiques. Prenons l'extrait suivant:

> En construisant et en organisant un répertoire de calcul, les élèves commencent à percevoir intuitivement certaines propriétés des opérations, telles que l'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication. De plus, la commutativité est généralement identifiée avant toute présentation par l'enseignant. Cela peut être vu dans des situations où, en ajoutant 4 + 7, ils inversent les termes pour commencer à compter avec le plus grand nombre. (Brasil, 1997, p. 74, traduction propre).

Nous soulignons dans ce passage la construction du caractère outil des propriétés qui précède leurs présentations en tant qu'objet par l'enseignant. Cette construction s'appuie d'abord sur une mobilisation des propriétés par les élèves de façon intuitive dans les calculs - cela rejoint le fonctionnement implicite d'une notion au sens de Douady (1984, p.10).

> Nous parlons d'outil implicite quand l'élève fait fonctionner une notion ou une technique dans un problème sans être capable d'expliciter ce qu'il fait, sans connaître nécessairement les conditions d'emploi.

Dans l'exemple cité « 4 + 7 », la commutativité des termes permet de rendre la technique de sur-comptage plus efficace

(Kaspary et al, 2020), ce qui lui donne un caractère d'outil. En tant que composante de l'environnement technologique, la commutativité comme les autres propriétés de calculs, peut acquérir le statut d'outil au niveau des gestes de la technique à travers le contrôle, qui permet à l'élève d'éviter certaines erreurs des calculs.

> Comme pour les autres procédures de calcul, les techniques opératoires habituellement enseignées à l'école sont également basées sur les règles du système de numération décimale et l'existence de propriétés et de régularités présentes dans les opérations. Cependant, un bon nombre des erreurs commises par les élèves sont dues à la non-disponibilité de ces connaissances ou à la non-reconnaissance de leur présence dans le calcul. (Brasil, 1997, p. 78, traduction propre).

Erreurs fréquentes sont produites par de mauvais gestes dans la mise en œuvre d'une technique, mais aussi par son application hors sa portée théorique au sens de Kaspary et al., (2020, p.247):

> La portée théorique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique permet d'accomplir une tâche quelconque de cet ensemble en dehors de toute considération des conditions de son exécution. C'est-à-dire qu'on examine cette technique d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte le cognitif et donc la maîtrise de sa réalisation par un sujet.

Un exemple de mise en œuvre d'une technique hors de sa portée est lorsque l'élève applique la commutativité pour l'opération de la soustraction. Considérons la tâche « calculer 23 – 15 » : dans la technique posée, l'élève se trouve devant l'opération « 3 - 5 », où certains commutent les deux chiffres pour faire l'opération « 5 - 3 », ce qui donne comme résultat « 23 – 15 = 12 ».

Dans cette technique personnelle de l'élève (Croset et Chaachoua, 2016), la commutativité est mobilisée comme outil hors de sa portée théorique, où elle ne peut pas donc s'appliquer. C'est dans ce sens qu'on peut noter l'importance d'étudier les limites des outils qu'on dispose, comme c'est mis en avant dans les indications de PCN.

En 2017, les PCN ont été remplacés par la Base Nationale Commune Curriculaire (BNCC). Dans ce nouveau document officiel, un objectif visé attire notre attention : « Utiliser les propriétés des opérations pour développer des stratégies de calcul ». L'aspect outil des propriétés des opérations est fortement signalé dans ce document, comme nous le voyons dans les passages suivants:

> Utiliser les propriétés des opérations pour développer des stratégies de calcul implique d'identifier les régularités des opérations et de les appliquer, si possible, pour obtenir les résultats. Les propriétés à souligner : commutativité d'addition et de la multiplication ; associativité d'addition et de la multiplication ; l'élément neutre de l'addition et de la multiplication et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. (Brasil, 2017, traduction propre).
>
> Lors de la préparation du curriculum, il est important de considérer que la reconnaissance des propriétés des opérations facilite l'apprentissage des techniques opératoires et l'exercice du calcul mental. On n'imagine pas ici que les élèves sont exposés à des propriétés comme un ensemble de noms dénués de sens (ces noms n'ont pas besoin d'être soulignés). Mais il est important qu'ils étudient les situations dans lesquelles ils perçoivent que l'addition et la multiplication sont commutatives par opposition à la soustraction et à la division et que la propriété distributive sous-tend l'algorithme de multiplication. (Brasil, 2017, traduction propre).

Trois propriétés sont citées : commutativité, associativité et l'élément neutre. Nous soulignons dans cet extrait que ces propriétés ne devraient pas être un enjeu d'étude en soi, ce qui est renfoncé à travers la critique sous-entendue de leurs désignations par des noms. En revanche, on doit les étudier à travers des situations qui leur donnent du sens en lien avec les techniques de calcul. C'est donc le caractère outil qui est bien l'enjeu dans l'étude de ces propriétés.

Nous passons maintenant aux documents d'évaluations de PNLD qui peuvent nous apporter des éléments sur ce qui a été véhiculé dans les manuels brésiliens au cours de ces trois dernières décennies.

La première évaluation de PNLD, en 1994, a été marquée par de fortes critiques sur les propriétés d'addition.

> […] une importance inutile est accordée à ce niveau de scolarité aux propriétés structurelles des opérations : clôture, commutativité, associativité, existence d'un élément neutre. (PNLD, 1994, p. 61, traduction propre).

Nous résumons les résultats de cette évaluation en trois points : la précocité de la présentation des propriétés ; la valorisation inutile sur la nomenclature qui amène à l'étude d'un formalisme futile et inapproprié à la maturité des élèves ; et la généralisation hâtée des propriétés à partir de peu d'exemples. Ces trois points décrivent, dans un premier temps, l'état actuel de l'étude des propriétés d'addition. Ils révèlent l'accent du statut objet accordé à ces propriétés, identifié comme un héritage du formalisme de la réforme des mathématiques modernes. Dans un deuxième temps, cette description substantiellement négative insinue des prescriptions sur l'avenir de cette étude.

En 1996 et 1998, PNLD présente une liste de caractéristiques des manuels brésiliens qui sont contraires aux nouvelles tendances curriculaires dans le monde. L'intention est d'identifier les résistances aux changements de la part des maisons d'édition. Un des points de cette liste est encore la formalisation précoce des propriétés des opérations arithmétiques.

Dans les évaluations de 2004 et 2007 (publiées en 2002 et 2006), les pratiques très directives étaient toujours condamnées par l'évaluation.

> Bien que correcte, la systématisation des concepts et des procédures est très directive [...] sans que l'élève ait le temps de découvrir lui-même des propriétés et des régularités. (PNLD, 2002, p. 134, traduction propre).

> [...] il y a un excès de systématisation, avec une prédominance des algorithmes et la présentation de toutes les propriétés des opérations, en particulier dans la troisième et quatrième année. (PNLD, 2006, p. 194, traduction propre).

Le fonctionnement implicite du caractère outil des propriétés, au sens de Douady (1984), semble alors peu exploité dans certains manuels de cette époque. La valorisation des moments de systématisons démontre aussi la volonté de faire vivre ces propriétés en tant qu'objets reconnus par l'institution d'enseignement.

Dans les évaluations plus tardives, comme en 2013 et 2016 (publiées en 2012 et 2015), quelques manuels conservent toujours cette pratique formelle et précoce de présentation. La place donnée aux propriétés des opérations reste quelque chose de contesté par PNLD.

> Il y a une attention excessive portée au contenu des nombres et des opérations, en particulier dans le manuel de la 4ème année, au détriment de l'étude des autres domaines. Le manuel de 5ème année comprend, par exemple, des contenus qui peuvent être laissés pour de futures étapes d'apprentissage : comme l'étude formelle sur les propriétés opérationnelles; [...] (PNLD, 2012, p. 211-212).

> En général, les propriétés sont présentées après avoir examiné un ou plusieurs exemples, sans poser suffisamment de questions pour permettre aux étudiants de comprendre la signification des concepts. (PNLD, 2015, p. 106).

Nous trouvons aussi au fil du temps des choix didactiques qui sont valorisés et encouragés par cette institution évaluatrice, qui révèlent une réelle intention de faire vivre les propriétés au service des techniques de calcul.

> À ce stade d'enseignement, les élèves doivent comprendre les différentes significations des opérations et, en développant avec une certaine autonomie leurs propres stratégies pour les exécuter, ils appliquent leurs propriétés et développent leur capacité à argumenter et à justifier leurs solutions. C'est en explorant les relations entre les propriétés des opérations et le système de numération décimale, ainsi que les relations entre les différentes opérations, que les élèves peuvent acquérir la compréhension et la maîtrise des algorithmes conventionnels. (PNLD, 2015, p.15, traduction propre).

> Dans les manuels évalués, pour l'enseignement du calcul mental, on a souvent recours à la décomposition additive ou multiplicative des nombres et à l'utilisation de propriétés commutatives, associatives et distributives d'addition et de multiplication. Il s'agit donc de permettre à l'élève de développer des compétences extrêmement utiles dans sa formation en mathématiques. (PNLD, 2015, p.32, traduction propre).

En 2019, les manuels ont été évalués par PNLD suivant les objectifs d'apprentissage présentés dans le document officiel BNCC. Dans les critères d'évaluation, nous trouvons explicitement un critère lié au travail des propriétés des opérations pour le développement des stratégies de calculs.

Nous concluons donc qu'au fil du temps il existe une volonté de changement curriculaire sur le statut des propriétés d'addition. Dans ce sens, l'aboutissement de cette orientation valorise le statut outil comme la raison d'être de l'étude de ces propriétés à l'école primaire. Nous allons étudier l'effet de ces recommandations sur une collection de manuels au cours de cette période.

4 Étude des changements d'une collection de manuels dans des moments différents

Les manuels sont un important véhicule du curriculum prescrit dans les sociétés. Différemment des documents officiels, où nous avons un discours généralement plus global sur les œuvres à enseigner, dans les manuels nous nous retrouvons de façon plus explicite avec les éléments praxéologiques de l'activité mathématique pensée pour vivre dans les écoles selon une organisation didactique. Les manuels sont, dans ce sens, une espèce de mise en scène de ce qui peut se produire dans les systèmes didactiques.

La collection de manuels qui illustre notre étude, intitulée *« A conquista da Matemática »*, a son histoire attachée aux évaluations de PNLD, comme l'on montre dans le tableau ci-dessous.

Tableau 1 - Les résultats des évaluations de PNLD selon les années de référence

Année	Résultats des évaluations
1994	Recommandée avec restriction
1996	Non recommandée
1998	Recommandée avec restriction (avec une étoile)
2000	Absente dans la liste des collections recommandées/approuvées
2004	Absente dans la liste des collections recommandées/approuvées
2007	Approuvée
2010	Absente dans la liste des collections recommandées/approuvées

Quand la collection n'apparaît pas dans la liste de collections de l'école primaire recommandées/approuvées par PNLD, deux scénarios sont possibles : la collection n'a pas été soumise à évaluation, ou la collection a été soumise et n'a pas été recommandée/approuvée par PNLD.

Nous parcourons par la suite les différentes versions de cette collection : celles évaluées en PNLD/1994, PNLD/1996, PNLD/1998, PNLD/2007 et en PNLD/2016.

Dans la version la plus ancienne de cette collection (publiée en 1989 et évaluée par PNLD en 1994), nous remarquons depuis la première année de l'école primaire un intérêt sur l'environnement technologique des opérations arithmétiques. Les tâches proposées marquent des explorations implicites de certaines régularités, qui donneront lieu plus tard à l'institutionnalisation des propriétés d'addition. Dans cet esprit, le *zéro* est considéré dans le regroupement de tâches pour mettre en avant l'élément neutre, comme l'on voit dans la Figure 1.

Figure 1 - Extrait du manuel

1. Calcule:

a) 1 + 0 = 1	b) 2 + 0 = 2	c) 3 + 0 = 3
d) 4 + 0 = 4	e) 5 + 0 = 5	f) 6 + 0 = 6
g) 7 + 0 = 7	h) 8 + 0 = 8	i) 9 + 0 = 9

La source: Giovanni (1989, p.31).

Dans le même sens, la propriété de la commutativité est aussi traitée dans le manuel de la première année (figure 2), où la question suivante est posée après la proposition de quelques calculs qui mettent en œuvre cette propriété : « Dans une addition, lorsque l'on change l'ordre des nombres, le résultat est-il modifié ? »

Figure 2 - Extrait du manuel

6. Calcule:

a) 1 + 2 = 3; 2 + 1 = 3
b) 1 + 6 = 7; 6 + 1 = 7
c) 1 + 5 = 6; 5 + 1 = 6
d) 8 + 0 = 8; 0 + 8 = 8
e) 3 + 2 = 5; 2 + 3 = 5
f) 4 + 3 = 7; 3 + 4 = 7
g) 0 + 4 = 4; 4 + 0 = 4
h) 7 + 2 = 9; 2 + 7 = 9
i) 2 + 5 = 7; 5 + 2 = 7
j) 6 + 2 = 8; 2 + 6 = 8
l) 9 + 0 = 9; 0 + 9 = 9
m) 8 + 1 = 9; 1 + 8 = 9
n) 3 + 5 = 8; 5 + 3 = 8
o) 2 + 4 = 6; 4 + 2 = 6

Uma pergunta-desafio

Observe os exercícios que você fez e responda:

Numa adição, quando trocamos a ordem dos números, o resultado muda?

Sim [ ] Não [X]

La source: Giovanni (1989, p.32).

Ainsi, au début de l'école primaire ces deux propriétés d'addition (élément neutre et commutativité) sont abordées de façon intuitive. Ces propriétés sont reprises, approfondies et institutionnalisées, avec introduction de vocabulaire, dans les manuels de la troisième et de la quatrième année.

Chaque propriété, y compris deux autres, l'associativ té et la clôture, est étudiée dans les dernières années de l'école primaire avec une même organisation didactique : deux activités d'exploration, puis institutionnalisation. Dans la figure 3, nous avons un exemple qui illustre le travail proposé pour la propriété de la clôture.

Figure 3 - Extrait du manuel

Propriedades

a) **Propriedade do fechamento**

- Escreva dois números naturais quaisquer: .... e ....
  Calcule a soma entre eles: .... + ... = ...
  O resultado obtido é, também, um número natural?
  Sim [ ] Não [ ]
- Escreva dois outros números naturais quaisquer: .... e ....
  Calcule a soma entre eles: .... + ... = ...
  O resultado que você obteve é, também, um número natural?
  Sim [ ] Não [ ]

Você nota que a soma de dois números naturais é sempre um número natural.

La source: Giovanni (1989, p.35).

Jusqu'au moment d'institutionnalisation, c'est le statut d'objet qui prédomine dans l'étude de ces propriétés. Le statut d'outil apparaît, même que discrètement, seulement dans les activités d'application. Par exemple, pour la propriété de la commutativité nous avons l'activité suivante :

Figure 4 - Extrait du manuel

3. Calcule a primeira coluna e procure somente completar a segunda coluna:

a) 57 + 24 = 81
b) 165 + 210 = 375
c) 1 460 + 375 = 1.835
d) 2 852 + 4 148 = 7.000
e) 375 + 1 460 = ...
f) 4 148 + 2 852 = ...
g) 24 + 57 = 81
h) 210 + 165 = 375

La source: Giovanni (1989, p.56).

L'énoncé indique qu'il faut accomplir les tâches de la première colonne puis, sans faire de nouveaux calculs, accomplir les tâches de la deuxième colonne. Il s'agit d'un choix didactique qui permet d'évoquer l'idée que « si on connaît la somme 'a + b', on connaît également la somme 'b + a' ». Cette activité, cependant, n'interroge pas comment on calcule 'a + b'. Les valeurs des nombres ne permettent pas non plus d'exploiter l'intérêt de permuter les termes d'une somme afin de faciliter le calcul, un aspect qui mérite qu'on analyse de plus près.

Prenons les tâches « 7 + 24 » et « 24 + 7 ». En sachant que ces deux expressions sont mathématiquement équivalentes et en connaissant la technique de sur-comptage, nous sommes amenés à choisir la deuxième configuration pour trouver la somme. Nous observons que cette technique n'est pas également efficace si on l'utilise pour la tâche « 7 + 24 », d'où l'intérêt d'appliquer la commutativité. Le point est que dans cette collection de manuels, l'unique technique qu'on dispose pour accomplir les tâches de ce type est l'algorithme posé (figure 5).

Figure 5 - Extrait du manuel

27. Arme e efetue:

a) 63 + 8 → 63 + 8 = 71
b) 35 + 5 → 35 + 5 = 40
c) 24 + 9 → 24 + 9 = 33
d) 35 + 8 → 35 + 8 = 43
e) 69 + 5 → 69 + 5 = 74
f) 48 + 2 → 48 + 2 = 50
g) 76 + 6 → 76 + 6 = 82
h) 88 + 8 → 88 + 8 = 96
i) 34 + 6 → 34 + 6 = 40

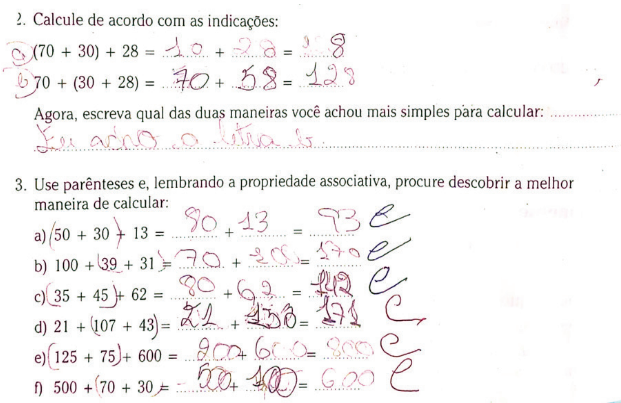
La source: Giovanni (1989, p.116).

Quand l'unique technique qui existe est l'algorithme posé, la propriété de la commutativité en tant qu'outil n'a pas effectivement d'intérêt pour la somme de deux nombres. Notons que dans le cas de la technique opératoire de la multiplication, la commutativité trouve son intérêt car elle permet de réduire le nombre d'étapes dans calcul : il y a moins d'étapes de calcul si pour la tâche 2 on pose en première ligne 3561 et en deuxième ligne 25. Cela n'est pas le cas de l'algorithme de l'addition : le coût reste le même indépendamment de l'ordre des termes.

Le caractère outil de la propriété de la commutativité est donc affaibli par les choix didactiques qui sont faits.

Passons à la propriété de l'associativité :

Figure 6 - Extrait du manuel « Giovanni, 1989, p. 58, v.3 » utilisé par un élève en 1992


2. Calcule de acordo com as indicações:
a) (70 + 30) + 28 = 100 + 28 = 128
b) 70 + (30 + 28) = 70 + 58 = 128
Agora, escreva qual das duas maneiras você achou mais simples para calcular: Eu achei a letra b
3. Use parênteses e, lembrando a propriedade associativa, procure descobrir a melhor maneira de calcular:
a) (50 + 30) + 13 = 80 + 13 = 93
b) 100 + (39 + 31) = 70 + 100 = 170
c) (35 + 45) + 62 = 80 + 62 = 142
d) 21 + (107 + 43) = 21 + 150 = 171
e) (125 + 75) + 600 = 200 + 600 = 800
f) 500 + (70 + 30) = 500 + 100 = 600

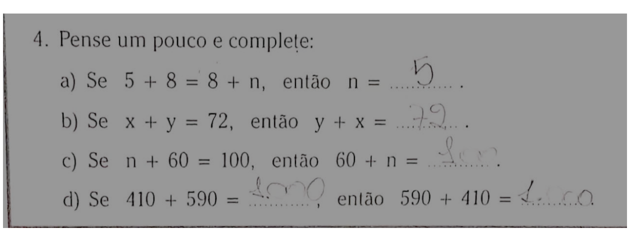
La source: Giovanni (1989, p.58).

Dans la première activité, l'élève est amené à comparer deux façons d'accomplir une tâche. Puis, dans l'activité suivante, l'élève est invité à faire usage de la propriété d'associativité pour « *découvrir la meilleure manière de calculer »* (mots extraits de l'énoncé). Contrairement au cas de la commutativité, cet exemple montre une intention de mettre cette propriété au service des calculs, ce qui contribue au statut d'outil de l'associativité. Notons qu'il aurait été possible de prolonger le travail sur l'associativité en la combinant avec la commutativité afin de donner à celle-ci le statut d'outil. Par exemple pour calculer 50 + 13 + 30, on commute 13 et 30 puis on applique l'associativité.

Ce que nous observons est que le double statut d'objet et d'outil des propriétés d'addition coexistent dans ces manuels, avec une attention spéciale sur le statut objet.

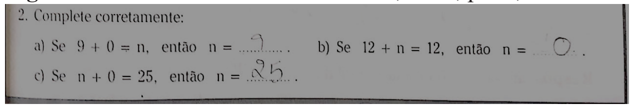
Un autre aspect particulier dans ces manuels mérite d'être discuté. Pour cela, prenons les exemples suivants (Figures 7, 8 et 9) :

Figure. 7 - Extrait du manuel « Giovanni, 1989, p. 56, v.3 »


4. Pense um pouco e complete:
a) Se 5 + 8 = 8 + n, então n = 5.
b) Se x + y = 72, então y + x = 72.
c) Se n + 60 = 100, então 60 + n = 100.
d) Se 410 + 590 = 1000, então 590 + 410 = 1000

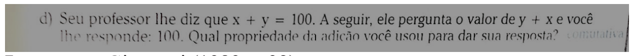
La source: Giovanni (1989, p.32).

Figure 8 - Extrait du manuel « Giovanni, 1989, p. 59, v.3 »


2. Complete corretamente:
a) Se 9 + 0 = n, então n = 9.
b) Se 12 + n = 12, então n = 0.
c) Se n + 0 = 25, então n = 25.

La source: Giovanni (1989, p.32).

Figure 9 - Extrait du manuel « Giovanni, 1989, p. 39, v.4 ». La traduction de d est : « Votre professeur vous dit que x + y = 100. Puis il vous demande la valeur de y + x et vous lui répondez : 100. Quelle est la propriété de l'addition que vous avez appliquée pour donner votre réponse ? »


d) Seu professor lhe diz que x + y = 100. A seguir, ele pergunta o valor de y + x e você lhe responde: 100. Qual propriedade da adição você usou para dar sua resposta? comutativa

La source: Giovanni (1989, p.32).

Ces trois dernières activités montrent une pratique récurrente dans ces manuels : l'algébrisation de l'activité mathématique à l'école primaire. Un héritage identifié par l'évaluation de PNLD comme propre de la réforme des mathématiques modernes :

> Bien que la collection renonce à une introduction artificielle de la théorie des ensembles, l'ouvrage présente une caractéristique formelle, notamment en ce qui concerne les opérations des nombres naturels [...] Le manuel présente des défaillances méthodologiques parmi lesquelles : la plus grave concerne la progressivité du processus de symbolisation. Ainsi, dans des situations problématiques, la pensée de l'élève est incitée de manière linéaire, au moyen de questions, à exprimer ses conclusions dans un langage mathématique complexe, présenté comme un modèle à suivre avec rigueur et insistance. [...] Le manuel de la troisième année présente des situations pratiques qui conduisent le raisonnement de l'élève aux conclusions des propriétés structurelles des opérations avec des nombres entiers positifs. Cette explication, même si elle est bien préparée, se place au début de cette année et révèle une préoccupation au formalisme, en particulier en ce qui concerne les propriétés de la clôture et de l'existence de l'élément neutre pour l'addition et la multiplication. » (PNLD, 1994, pp. 192-193, traduction propre).

Dans d'autres passages du document d'évaluation, nous avons encore d'autres fortes critiques, comme le montre l'extrait suivant :

> L'expression verbale valeur de "n" n'a aucune signification pour un enfant qui vient de commencer dans le monde des nombres et des lettres. [...] nous constatons que le travail ne fournit pas les conditions pour un développement progressif de la construction du langage mathématique par l'élève. (PNLD, 1994, p. 197, traduction propre)

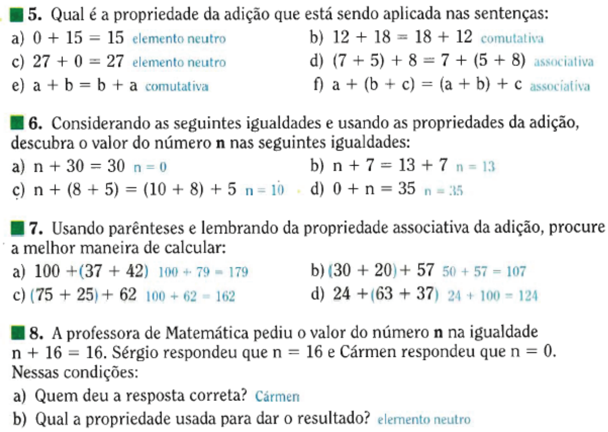
Ce formalisme apporté par le langage algébrique illustre, de façon caricaturale, un curriculum des mathématiques passionné *par les ostensifs des mathématiques savantes* (Bosch et Chevallard, 1999), ce qui est effectivement une marque connue de la réforme des mathématiques modernes.

Les manuels de cette collection ont été mis à jour (publiée en 1992) et ont été évalués en 1996 et en 1998 par PNLD. Bien que nous trouvions des changements en comparaison à l'édition ancienne, beaucoup de choses sont préservées.

Un point de changement important est la disparition de la propriété de clôture. Nous soulignons que cette propriété ne peut pas participer, par sa nature même, aux gestes des techniques de calcul. La raison de son étude se trouve alors dans l'appréciation d'une approche théorique, puis plus formelle, de l'opération d'addition.

À part la disparition de la propriété de clôture, ces nouveaux manuels montrent beaucoup plus de résistances que des changements. Dans ce sens, les autres propriétés – commutativité, associativité et élément neutre – sont travaillées de la même manière qu'on avait vu avant.

Figure 10 - Extrait du manuel « Giovanni et Giovanni Jr., 1992, p. 39, v.3 »



5. Qual é a propriedade da adição que está sendo aplicada nas sentenças:
a) 0 + 15 = 15 elemento neutro
b) 12 + 18 = 18 + 12 comutativa
c) 27 + 0 = 27 elemento neutro
d) (7 + 5) + 8 = 7 + (5 + 8) associativa
e) a + b = b + a comutativa
f) a + (b + c) = (a + b) + c associativa

6. Considerando as seguintes igualdades e usando as propriedades da adição, descubra o valor do número **n** nas seguintes igualdades:
a) n + 30 = 30 n = 0
b) n + 7 = 13 + 7 n = 13
c) n + (8 + 5) = (10 + 8) + 5 n = 10
d) 0 + n = 35 n = 35

7. Usando parênteses e lembrando da propriedade associativa da adição, procure a melhor maneira de calcular:
a) 100 + (37 + 42) 100 + 79 = 179
b) (30 + 20) + 57 50 + 57 = 107
c) (75 + 25) + 62 100 + 62 = 162
d) 24 + (63 + 37) 24 + 100 = 124

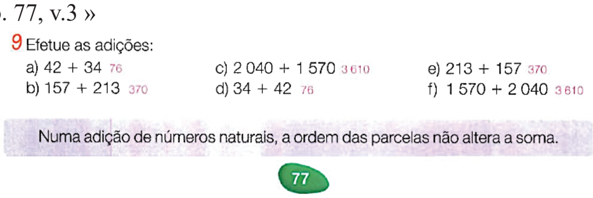
8. A professora de Matemática pediu o valor do número **n** na igualdade n + 16 = 16. Sérgio respondeu que n = 16 e Cármen respondeu que n = 0. Nessas condições:
a) Quem deu a resposta correta? Cármen
b) Qual a propriedade usada para dar o resultado? elemento neutro

La source: Giovanni (1989, p.32).

Nous passons alors à l'examen de la version évaluée en 2007 (publiée en 2005). Les premiers signes de différence se trouvent déjà sur la nouvelle couverture des manuels : le nom consacré dans le marché, « A conquista da *matemática* », compte avec une nouvelle étiquette, « la plus actuelle ». Lorsqu'on regarde de plus près ces manuels, nous confirmons qu'effectivement il s'agit d'une nouvelle œuvre.

Tout le langage algébrique a disparu, et avec cela la plupart des activités dédiées à l'étude des propriétés d'addition en tant qu'objet a aussi perdu sa place. Les propriétés apparaissent, dans ce nouveau contexte, seulement dans les deux dernières années de l'école primaire quasi camouflées parmi les activités. Nous nous sommes alors demandé sur la raison d'être de ce qui est resté de cette étude. Pour cela, considérons une des activités proposées sur la notion de commutativité :

Figure 11 - Extrait du manuel « Giovanni et Giovanni Jr., 2005, p. 77, v.3 »



9 Efetue as adições:
a) 42 + 34 76
b) 157 + 213 370
c) 2 040 + 1 570 3 610
d) 34 + 42 76
e) 213 + 157 370
f) 1 570 + 2 040 3 610

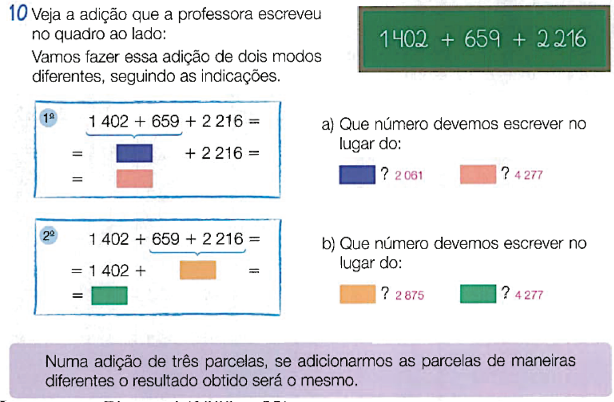
Numa adição de números naturais, a ordem das parcelas não altera a soma.

77

La source: Giovanni (1989, p.32).

Après ces six tâches, on institutionnalise : « Dans une addition de nombres entiers positifs, l'ordre des nombres ne change pas la somme. ». Remarquons que les valeurs des nombres ne permettent pas de montrer le possible avantage de permutation des termes d'une addition. L'intention est donc uniquement portée sur l'identification de la régularité en jeu. C'est dans ce même esprit que la propriété d'associativité est travaillée, à partir des nombres 1402, 659 et 2216 :

Figure 12 - Extrait du manuel « Giovanni et Giovanni Jr., 2005, p. 78, v.3 »



10 Veja a adição que a professora escreveu no quadro ao lado:
Vamos fazer essa adição de dois modos diferentes, seguindo as indicações.

1402 + 659 + 2216

1º 1 402 + 659 + 2 216 =
= ☐ + 2 216 =
= ☐

a) Que número devemos escrever no lugar do:
☐ ? 2 061 ☐ ? 4 277

2º 1 402 + 659 + 2 216 =
= 1 402 + ☐ =
= ☐

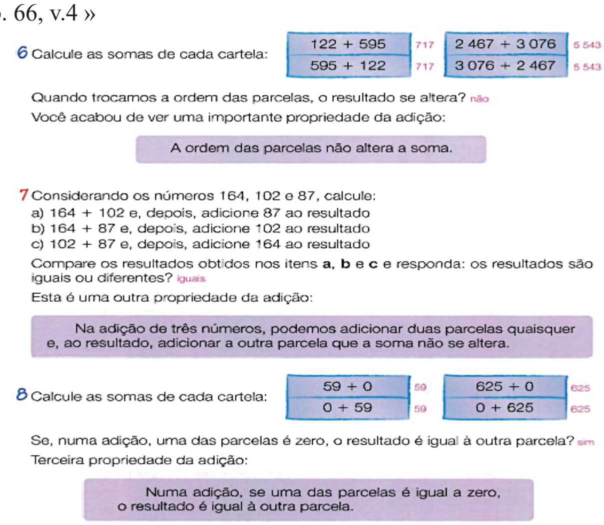
b) Que número devemos escrever no lugar do:
☐ ? 2 875 ☐ ? 4 277

Numa adição de três parcelas, se adicionarmos as parcelas de maneiras diferentes o resultado obtido será o mesmo.

La source: Giovanni (1989, p.32).

Alors, quelle est l'intention de conserver cette place à l'institutionnalisation de ces propriétés à la fin de l'école primaire ? Les élèves ne devraient-ils pas savoir depuis déjà un moment que, par exemple, « dans une addition, si une des valeurs est égale à zéro, le résultat est égal à l'autre valeur », comme l'on voit dans la figure 13 ci-dessous pour la propriété de l'élément neutre ?

Figure 13 - Extrait du manuel « Giovanni et Giovanni Jr., 2005, p. 66, v.4 »



6 Calcule as somas de cada cartela:
122 + 595 717 | 2 467 + 3 076 5 543
595 + 122 717 | 3 076 + 2 467 5 543

Quando trocamos a ordem das parcelas, o resultado se altera? não
Você acabou de ver uma importante propriedade da adição:

A ordem das parcelas não altera a soma.

7 Considerando os números 164, 102 e 87, calcule:
a) 164 + 102 e, depois, adicione 87 ao resultado
b) 164 + 87 e, depois, adicione 102 ao resultado
c) 102 + 87 e, depois, adicione 164 ao resultado
Compare os resultados obtidos nos itens **a**, **b** e **c** e responda: os resultados são iguais ou diferentes? iguais
Esta é uma outra propriedade da adição:

Na adição de três números, podemos adicionar duas parcelas quaisquer e, ao resultado, adicionar a outra parcela que a soma não se altera.

8 Calcule as somas de cada cartela:
59 + 0 59 | 625 + 0 625
0 + 59 59 | 0 + 625 625

Se, numa adição, uma das parcelas é zero, o resultado é igual à outra parcela? sim
Terceira propriedade da adição:

Numa adição, se uma das parcelas é igual a zero, o resultado é igual à outra parcela.

La source: Giovanni (1989, p.32).

Presque 10 ans après, dans une version actualisée de cette collection, approuvée en 2016, nous retrouvons toujours ces mêmes activités. Bien que nous retrouvions certains changements en regardant la totalité de la collection, ils ne sont pas présents en ce qui concerne l'étude des propriétés d'addition. Il s'agit alors d'un contenu qui est devenu stable dans cette collection.

La question est que ce qui reste, ce qui résiste, est quelque chose d'étrange avec une raison d'être douteuse. En effet, ces technologies sont essentielles pour faire vivre de façon intelligible certaines praxis, en particulier celles liées aux calculs réfléchis. Cependant, ces techniques n'existent presque pas dans cette collection. Ce sont les algorithmes posés qui dominent toujours l'étude. Alors, à quelle praxis correspondent effectivement ces logos qui sont conservés dans cette collection ?

Le problème du manque de connexion entre la praxis et le savoir est un phénomène connu dans la communauté didactique. Cependant, c'est normalement la carence du discours technologico-théorique pour les techniques qui sont au centre des critiques, comme discutent Sierra, Bosch et Gascón :

> Actuellement, les mathématiques scolaires se caractérisent par le fait que le discours mathématique qui explique, justifie et interprète les techniques, qu'elles soient algorithmiques ou non, n'est pas intégré à la pratique mathématique des élèves dans le but de le rendre plus efficace. (Sierra Delgado, Bosch et Gascón, 2013, p. 809, traduction propre)

Or, ce n'est pas exactement ce qui se passe dans cette collection, parce que les algorithmes posés ont leurs éléments technologiques étudiés – qui n'ont pas été présentées ici. En revanche, les propriétés qu'on a analysées ne sont pas vraiment exploitées comme outils pour créer de nouvelles praxis.

Finalement, ce que nous constatons est que le travail de ces logos en tant qu'objets a été énormément affaibli, sans la compensation d'une participation active dans les techniques. Néanmoins, l'institutionnalisation de ces propriétés permet de garder au moins un peu du théoricisme *volé* par les nouveaux mouvements de l'enseignement des mathématiques.

5 Conclusion

Selon Valente (2009), les manuels ont été des véhicules importants pour la diffusion des principes des Mathématiques Modernes au Brésil. Les manuels analysés du début des années 90 illustrent la force de cet héritage et permettent de montrer également l'impact d'une société sur le curriculum : la société brésilienne, ainsi constituée à l'époque, n'a pas favorisé les changements revendiqués au niveau international.

Les documents officiels nous montrent une vraie volonté de faire changer la raison d'être des propriétés d'addition : c'est le statut outil qui doit se démarquer. Cependant, cela ne se fait pas simplement en diminuant la place qu'on donne à l'étude des propriétés en tant qu'objet, comme le montre l'analyse des manuels.

L'analyse des différentes éditions de la collection dans le temps nous a indiqué des changements importants dans l'étude des propriétés d'addition, comme la disparition des tâches communiquées à l'aide d'un langage algébrique. Cependant, nous constatons que le manque d'une diversité des techniques de calcul n'offre pas des conditions pour que ces propriétés soient exploitées en tant qu'outil. Cela révèle un des effets de la survalorisation des algorithmes posés.

Pourtant, certaines de ces propriétés sont toujours institutionnalisées à la fin de ce cycle scolaire, encore que sans une raison d'être apparente. Elles sont, dans ce sens, une espèce de monument : à quoi servent-elles ?

Ces résultats sont bien entendu particulièrement liés à la collection analysée, mais cela nous indique les manœuvres possibles d'adaptation du curriculum prescrit.

Références

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensives. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(1), 77-124.

Brasil, (1997). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros* Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília, DF.

Chaachoua, H., et Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. In. Bronner et al. (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Actes du IIe congrès international CITAD 2*. (pp. 771-789).

Chaachoua, H. Ferraton, G., Desmoulins, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. *In Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Toulouse, 2013

Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique ? *In Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG* (pp. 167 – 194). Grenoble.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, 19 (2), 221-265.

Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. *Bulletin de l'APMEP*, (47), 439-461.

Chevallard, Y. (2009). Journal de la Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Publié en ligne

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-3.pdf. Consultation : 5 janvier, 2021.

Croset, M.C, et Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36(2), 161-196.

Douady, R. (1984). De la didactique des mathématiques a l'heure actuelle. *Cahier de didactique des mathématiques*. IREM, Université Paris VII, n. 6, s/d. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS00003.pdf Consulté : 5 janvier, 2021.

Douady, R. (1986). Jeux des cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2), 5-31.

Filgueiras, J. M. (2011). Os processos de avaliação de livros didáticos no Brasil (1938-1984). Thèse de doctorat, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC.

Fiorentini, D. (1994). Rumos da pesquisa brasiliera em educação matemática : o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. Thèse de doctorat, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

Romão, J. E. (2008). Globalização e reforma educacional no brasil (1985-2005). *Revista iberoamericana de educación*, (48), 11 – 127. doi : 10.35362/rie480692.

Kaspary, D. (2019). Noosfera e assujeitamento, duas noções da teoria antropológica do didático para problematizar o currículo e mudanças curriculares. *Revista Paranaense de Educação Matemática, América do Norte* (8), 229 – 247.

Kaspary, D. (2020). La noosphère, un lieu de tension pour le curriculum Étude didactique de la mise en place d'un système d'évaluation de manuels scolaires sur l'étude du champ additif à l'école primaire. *Thèse des universités UFMS (Brésil) et UGA (France)*.

Kaspary, D., Chaachoua, H., et Bessot, A. (2020). Qu'apporte la notion de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique ? *Annales de didactique et de sciences cognitives* (25), 243 - 269.

Sierra Delgado, T., Bosch, M., et Gascón, P. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática: el caso del algoritmo de la multiplicación. Bolema [online]. 27(47), 805-828. doi : 10.1590/S0103-636X2013000400006.

Valente, W. R. (2009). Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. Zetetike, 16(2). doi : 10.20396/zet.v16i30.8646894.