

## REPRESENTAÇÕES BIDIMENSIONAIS DE FIGURAS TRIDIMENSIONAIS: UM ESTUDO COM A VISUALIZAÇÃO

**Vera Helena Giusti de Souza<sup>1</sup>**

Universidade Anhanguera de São Paulo

**Maria Elisa Esteves Lopes Galvão<sup>2</sup>**

Universidade Anhanguera de São Paulo

**Wilson Roberto Soluna de Souza**

EE Prof<sup>a</sup> Maria Paula Ramalho Paes/Colégio Monteiro Lobato/Anglo

### RESUMO

Descrevemos as etapas de uma pesquisa interventiva, com análise qualitativa dos dados, que teve por objetivo investigar se a observação e a interpretação de imagens bidimensionais variadas contribuem para o desenvolvimento de habilidades de visualização (GUTIERREZ, 1996; PARSYSZ, 1988). As imagens foram escolhidas de forma a mostrar a evolução, ao longo do tempo, de recursos técnicos utilizados para representá-las. Com esse objetivo, formulamos duas questões de pesquisa: “A utilização de imagens externas variadas pode ajudar no desenvolvimento de habilidades de visualização?” e “Quais habilidades de visualização podem ser desenvolvidas com a análise dessas imagens?”. Os sujeitos foram quatro alunos brasileiros do terceiro ano do Ensino Médio (17-18 anos de idade) e cada um deles participou de duas entrevistas semiestruturadas (YUNES, 1998), áudio-gravadas, separadas por um trabalho individual. Na primeira entrevista, os sujeitos responderam, por escrito, questões investigativas elaboradas com base em características como tamanho, profundidade e organização das imagens representadas em gravuras, com o objetivo de provocar uma discussão inicial sobre a leitura e a interpretação de representações bidimensionais de figuras tridimensionais. Ao final da entrevista, os alunos receberam duas gravuras, cada uma com um conjunto de perguntas para serem respondidas por escrito e individualmente, cujas respostas deveriam ser trazidas para a segunda entrevista. Nesta, é apresentada uma figura em perspectiva

---

<sup>1</sup> [verahgsouza@gmail.com](mailto:verahgsouza@gmail.com)

<sup>2</sup> [meelg@ig.com.br](mailto:meelg@ig.com.br)

cônica e são exemplificadas algumas regras de perspectiva; em seguida, os alunos voltaram a observar as gravuras da primeira entrevista, para identificar a presença ou não dessas regras e para classificá-las como cônicas, paralelas ou nenhuma delas, buscando determinar possíveis pontos de fuga. A análise qualitativa dos protocolos mostrou que os alunos aumentaram seu repertório de imagens e despertaram para a necessidade de ficarem atentos para as características da representação, a fim de bem interpretá-las. A reflexão sobre os resultados leva-nos a recomendar a vivência de atividades de interpretação de imagens na sala de aula e na escola, para incentivar o aluno a desenvolver habilidades de visualização que poderão ajudá-lo no processo de aprendizagem da Geometria e que priorizem a qualidade na leitura, na interpretação e na representação plana de objetos geométricos. Os dados analisados mostram que estes indivíduos se baseiam essencialmente no pólo do visto (PARSYSZ, 1988) e evidenciam indícios, após as entrevistas, das habilidades percepção de figura-de-fundo e discriminação visual.

**Palavras-chave:** geometria, visualização, habilidade.

## ABSTRACT

In this paper, we describe the stages of an interventional study, aiming to investigate whether observation and analysis of various bi-dimensional images may contribute to the development of visualization skills (GUTIERREZ, 1996). The images were chosen in order to show the evolution, in time – Medieval Time, Renaissance and current days – of technical resources that were used to represent them. With such a aim, and based on the ideas of visualization developed by Parzysz (1988) and Gutiérrez (1996), we formulated two research questions: “*May the use of various external images promote the development of visualization skills?*”, “*What visualization skills may be developed with those images’ analysis?*”. Subjects were four Brazilian students from a third year of high school (17-18 years old). First, we conducted a structured interview (YUNES, 1998) with each of them, which was audio-recorded, then, they worked on an individual task, and, after that, a second interview was conducted with these students. In the first interview, subjects gave written responses to investigative questions designed considering characteristics as size, depth and organization of images represented in each figure, aiming to provoke an initial

discussion about reading and interpreting bi-dimensional representations of tri-dimensional figures. After such discussion, a photographic figure was presented to students to answer some questions and summarize the ideas discussed in the interview. In the end, students received two figures, each one with a set of questions to be given written answers and individually. Such answers were brought to the second interview, when it was presented a figure in conic perspective and some perspective rules are exemplified. After that, students went back to figures of the first interview to identify the presence or not of such rules in the representations and to classify them as conic, parallel or none of them, attempting to find possible vanishing points. Qualitative analysis of protocols evidenced that these students realized the need to be aware of the characteristics of the representation in order to make a good interpretation of them. Also, they have evolved in their process of visualization, showing some traces of visual discrimination and figure-ground perception. Reflecting on results from this research study, we recommend the use of activities of interpretation of images in classrooms and at school, to incentive students to develop visualization skills, which may help them in the processes of reading and interpreting bi-dimensional representations of tri-dimensional figures and, consequently, in their apprenticeship of Geometry.

**Key words:** Geometry, visualization, skills.

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho, relatamos etapas de uma pesquisa que teve por objetivo investigar se a observação e a análise de imagens bidimensionais variadas contribuem para o desenvolvimento de habilidades de visualização (GUTIERREZ, 1996). Essas imagens foram escolhidas de forma a mostrar a evolução, ao longo do tempo - Período Medieval, Renascimento e dias atuais - de recursos técnicos utilizados para representá-las.

Com esse objetivo e com base nas ideias de visualização desenvolvidas por Parzysz (1988) e Gutiérrez (1996), formulamos duas questões

*“A utilização de imagens externas variadas pode ajudar no desenvolvimento de habilidades de visualização?”*

*“Quais habilidades de visualização podem ser desenvolvidas com a análise dessas imagens?”.*

Os sujeitos foram quatro alunos brasileiros do terceiro ano do Ensino Médio (dezessete a dezoito anos de idade) e cada um deles participou de duas entrevistas semiestruturadas (YUNES, 1998), áudio-gravadas, separadas por um trabalho individual. Na primeira entrevista, os sujeitos responderam, por escrito, questões investigativas elaboradas com base em características como tamanho, profundidade e organização das imagens representadas em cada uma das gravuras, com o objetivo de provocar uma discussão inicial sobre a leitura e a interpretação de representações bidimensionais de figuras tridimensionais. Após esta discussão, a figura “Casa dos arames farpados” (p.99) foi apresentada aos alunos para que respondessem algumas perguntas e assim sintetizassem as ideias discutidas na atividade. Ao final, os alunos receberam duas gravuras, cada uma com um conjunto de perguntas para serem respondidas por escrito e individualmente, cujas respostas foram trazidas para a segunda entrevista. Nesta, é apresentada uma figura em perspectiva cônica e são exemplificadas algumas regras de perspectiva; após esta explicação, os alunos voltam às gravuras da primeira entrevista, para identificar a presença ou não dessas regras na representação feita e classificá-las. A análise qualitativa dos protocolos mostrou que os alunos aumentaram seu repertório de imagens e despertaram para a

necessidade de ficarem atentos para as características da representação, a fim de bem interpretá-las. A reflexão sobre os resultados leva-nos a recomendar a vivência de atividades de interpretação de imagens na sala de aula e na escola, para incentivar o aluno a desenvolver habilidades de visualização que poderão ajudá-lo no processo de aprendizagem da Geometria e que priorizem a qualidade na leitura, na interpretação e na representação plana de objetos geométricos.

Estes resultados fazem parte da pesquisa do terceiro autor, que a desenvolveu para a obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática pela UNIBAN-SP, sob a orientação da primeira autora e com valiosas sugestões da segunda.

## JUSTIFICATIVA

Em seu trabalho com geometria espacial, com alunos do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo, ao desenhar um cubo na lousa, surge a pergunta

Aluno: “Professor, como faço para desenhar esta figura no meu caderno?”

Desenhou um quadrado, depois outro, deslocado um pouco para a direita, voltou-se para os alunos e percebeu que a muitos não conseguiram acompanhar o desenho. Ao ligar os vértices correspondentes dos quadrados, a maioria dos alunos reconheceu o cubo, mas o professor percebeu o dilema entre o conhecimento em geometria espacial e o domínio das representações. Não ficou claro, para ele, se esse reconhecimento era por já terem visto um desenho semelhante no livro didático ou por saberem as regras que regem a elaboração do desenho.

Em outra turma, ao trabalhar com pirâmides, representou na lousa um tetraedro regular e surge a pergunta

Aluno: “Professor, se a figura desenhada na lousa é um tetraedro, e tetra quer dizer quatro, a figura não teria que ter quatro lados? No entanto eu só estou vendo três.”

Ao mostrar todas as quatro faces da figura representada na lousa (neste trabalho, “figura” designa o objeto matemático abstrato), pode perceber uma certa desconfiança, o que remete ao conflito que parece existir entre o que se “vê” no

desenho e o que “sabemos” sobre a figura geométrica, para enxergar além da visão imediata.

Numa outra aula, ao representar na lousa um prisma hexagonal regular, surge a questão

Aluno: “Professor, por que alguns segmentos estão tracejados?”

Ao explicar que eram tracejados os segmentos que estavam “na parte de trás” da figura, o professor comentou que o prisma tem três dimensões e estava representado em duas, o que significa que precisamos ter regras gerais que nos permitam elaborar uma representação que seja entendida por outras pessoas. Este aluno sabia que a superfície lateral do prisma tem seis faces e que cada face é um retângulo, mesmo não conseguindo visualizar, no desenho, “os que estavam por trás”.

Esses diálogos nos trouxeram a constatação de que alguns alunos apresentam dificuldades no processo de visualização de figuras tridimensionais, quando representadas em papel ou lousa e geraram a motivação que nos conduziu a um trabalho investigativo mais sistematizado e organizado, que foi transformado numa dissertação de Mestrado em Educação Matemática, defendida em 2010.

A leitura de Parzysz (1988) e de Gutiérrez (1996) deu suporte a essa motivação, pois as pesquisas desses autores sobre a temática das representações bidimensionais de figuras tridimensionais condizia com o estudo que pretendíamos realizar, em busca de respostas às nossas questões.

As pesquisas desenvolvidas por Miranda (2006), Rosalves (2006) e Kodama (2006) contribuíram com nossas ideias. Miranda (2006) usou a Geometria Descritiva, em um ambiente de Geometria Dinâmica, para verificar o reconhecimento de secções do cubo por oito alunos do Ensino Médio de uma Escola Militar (17 a 20 anos), tendo como fundamentação teórica as ideias de Parzysz (1988) sobre o “polo do visto” e o “polo do sabido”. Constatou que o “polo do sabido” foi privilegiado no estudo feito.

Rosalves (2006) pesquisou a passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial, com foco nas dificuldades de alunos do Ensino Médio para fazerem relações entre objetos geométricos tridimensionais e as respectivas representações bidimensionais. A pesquisadora baseou-se nas ideias de Parzysz (1988) e investigou se representações dinâmicas, em um ambiente com o Cabri 3D, são codificadas e

decodificadas pelos alunos e contribuem para o desenvolvimento de habilidades de visualização (GUTIÉRREZ, 1996) que possibilitam a interpretação de propriedades geométricas de objetos espaciais. Constatou que, tanto no ambiente Cabri 3D como no papel e lápis, os sujeitos privilegiaram o “polo do visto”, mas evoluíram com relação ao “polo do sabido”.

Kodama (2006) pesquisou a apropriação das regras da perspectiva cavaleira, por sete alunos de uma 3ª série do Ensino Médio, a partir das sombras de objetos - feitas num ambiente informático. Baseou-se nas ideias de Parzysz (1988) e de Boero (1996) sobre representações bidimensionais de figuras tridimensionais e concluiu que a utilização da perspectiva cavaleira pode contribuir para um equilíbrio entre o “pólo do visto” e o “pólo do sabido”.

Esses resultados reforçam nossa ideia de que é preciso explicitar, em sala de aula, as regras para elaboração das representações bidimensionais de figuras tridimensionais, para que alunos aprendam a escolhê-las e utilizá-las de forma a codificar e decodificar uma representação feita segundo essas regras.

Analisamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, 2006) do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2009) e livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro do Ensino Médio, obras nas quais identificamos preocupações ou sugestões similares às nossas e que corroboraram as questões que nos propusemos a responder com esta pesquisa.

## CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Parzysz (1988) afirma que há perda de informação quando fazemos um desenho bidimensional de um objeto geométrico bi ou tridimensional e analisa, entre os alunos, o que define como um conflito entre o *pólo do visto* e o *pólo do sabido*.

(i) *Pólo do visto*: consiste em representar ou interpretar um desenho como ele se apresenta aos olhos do observador, baseando-se na sua imagem visual.

(ii) *Pólo do sabido*: consiste em representar um desenho tentando preservar todas ou a maioria das propriedades e das características do objeto.

No primeiro caso, o sujeito “vê” o que aparece no desenho, sem considerar as reais propriedades da figura. No segundo caso, o sujeito “sabe” quais são as propriedades reais da figura e tenta representar ou interpretar todas num desenho, como é o caso dos alunos citados, que querem “enxergar” as quatro faces do tetraedro ou as seis do prisma hexagonal regular. O estudo de Parzysz (1988) sobre as dificuldades de representação e de visualização de objetos tridimensionais no plano foi feito com alunos franceses com idades entre 11 e 13 anos e partiu de três hipóteses

(1) Existe uma dialética entre a aquisição (ou reforço) dos conhecimentos em Geometria Espacial e o domínio das representações tridimensionais

(2) É obrigatório passar por uma fase de representação de modelos 3D para que os alunos possam formar imagens mentais que vão ajudá-los com as representações 2D

(3) Há necessidade de tornar explícitas as regras para fazer representações bidimensionais de figuras tridimensionais

Define “[...] a FIGURA é o objeto geométrico que é definido pelo texto que o descreve” e DESENHO, as representações materiais feitas por um sujeito (PARSYSZ, 1988, p. 80). Segundo ele, podemos dividir essas representações em dois níveis

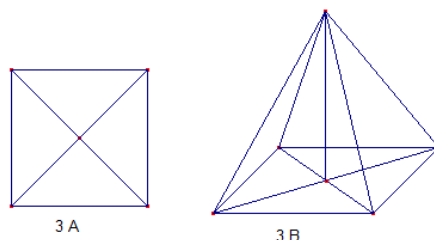
- Nível 1 (representações próximas): são as representações de objetos planos e os modelos (maquetes) de objetos tridimensionais.
- Nível 2 (representações distantes): são as representações bidimensionais de objetos tridimensionais.

O nível 0 é o do objeto matemático, que tem uma representação mental (abstrata). Quando se passa de um nível para outro, mais elevado, há uma perda de informação (PARZYSZ, 1988), associada a vários fatores, entre os quais o de que não é possível representar todas as propriedades inerentes ao objeto em si.

Quando se passa do nível 0 para o nível 2, temos as representações bidimensionais de objetos geométricos tridimensionais. Nesta passagem, há perda tanto de informações como de propriedades do objeto em si, que não são passíveis de adivinhação e podemos dizer que, em geral, a leitura e a interpretação, tanto de representações próximas como de representações distantes, só será possível com a



ajuda de um texto original ou uma legenda acompanhando as representações, como forma de compensar a perda de informações, pois nem o desenho nem o modelo podem substituir a figura. Isto pode ser exemplificado na Figura 1, que pode ser uma representação de um quadrado e suas diagonais (representação próxima), ou uma pirâmide com vista superior (representação distante).



**Figura 1:** Um quadrado e uma pirâmide?

Fonte: Parzys (1988)

A ambiguidade estará presente sempre que se faça uma passagem do nível 0 para qualquer outro, o que justifica que é preciso explicitar, em sala de aula da Educação Básica, as regras que permitem elaborar uma representação distante, para que o leitor possa, de forma consciente, codificar e/ou decodificar uma representação, sem ambiguidades.

Gutiérrez (1998) teve como objetivo refletir sobre problemas na utilização de representações bidimensionais de objetos tridimensionais na aprendizagem da geometria espacial, trabalhando com alunos espanhóis (7 a 14 anos). Para ele, as representações planas compreendem dois tipos de dificuldades: a decodificação (interpretação do desenho bidimensional para torná-lo objeto tridimensional) e a codificação (interpretação do objeto tridimensional para torná-lo um desenho bidimensional).

Para superar essas dificuldades, os indivíduos devem desenvolver o que chama de *visualização* (GUTIÉRREZ, 1996, p.9-10): imagens mentais, representações externas, “processo” de visualização e habilidades de visualização.

*Uma “imagem mental” é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade por meio de elementos visuais ou espaciais.*

*Uma “representação externa” pertinente para a visualização é qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades, incluindo fotos, desenhos, diagramas, entre outros, que ajuda a criar ou transformar imagens mentais e fazer raciocínio visual.*

*Um “processo” de visualização é uma ação física ou mental, onde imagens mentais estão envolvidas. Existem dois processos na visualização: “Interpretação visual da informação” para criar imagens mentais e “interpretação de imagens mentais” para gerar informação.*

*Os indivíduos devem adquirir e aperfeiçoar um conjunto de “habilidades” de visualização para realizar os processos necessários com imagens mentais específicas para um determinado problema. (GUTIÉRREZ, 1996, p. 9-10, tradução nossa.)*

Para resolver um problema de Matemática, o aluno deve ser capaz de escolher, no conjunto de habilidades visuais, a que interessa. As principais são

*“Percepção de figura-de-fundo”: habilidade de identificar uma figura específica, destacando-a de um panorama complexo.*

*“Constância perceptiva”: habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou imagem mental) são independentes do tamanho, da cor, da textura ou da posição e permanecem inconfundíveis quando um objeto ou uma imagem são percebidos em diferentes orientações.*

*“Rotação mental”: habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas e visualizar uma configuração em movimento.*

*“Percepção de posições espaciais”: habilidade de relacionar um objeto, uma imagem ou uma imagem mental a si próprio.*

*“Percepção de relações espaciais”: habilidade de relacionar vários objetos, imagens e/ou imagens mentais entre si, ou simultaneamente a si próprio.*

*“Discriminação visual”: habilidade de comparar vários objetos, imagens e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles. (GUTIÉRREZ, 1996, p.10, tradução nossa.)*

Gutiérrez (1998) utilizou “módulos multicubos” para fazer diferentes representações planas de objetos tridimensionais e observou que os desenhos que os estudantes aprendem a fazer e veem, em livros didáticos da época, são feitos em perspectiva paralela, embora seja, segundo ele, uma das mais difíceis de serem realizadas corretamente: “É comum, por exemplo, que os professores ensinem seus alunos a desenhar um cubo a partir de dois quadrados iguais e unindo os vértices correspondentes” (GUTIÉRREZ, 1998).

As dificuldades que Gutiérrez (1998, p. 209) encontrou nos estudantes de sua pesquisa podem ser divididas, segundo ele, em duas: conceituais e técnicas. As conceituais estão relacionadas à compreensão das características da representação. As técnicas, às estratégias de desenho ou construção.

Concordamos com Gutiérrez (1996, 1998) que não devemos deixar que as dificuldades bloqueiem o desenvolvimento do trabalho com Geometria. Uma forma de conseguir isto é trazer para a sala de aula uma abordagem que favoreça o desenvolvimento e a aprendizagem da visualização (GUTIÉRREZ, 1996) e de regras que permitam a codificação e a decodificação em Geometria, sem ambiguidades (PARZYSZ, 1988). Nossa pesquisa buscou uma abordagem possível.

As representações bidimensionais que mais encontramos em livros didáticos brasileiros de Matemática são as feitas com base na perspectiva cavaleira ou na axonométrica isométrica, que eram também as mais usuais em salas de aula da França e da Espanha, respectivamente segundo Parzysz (1988) e Gutiérrez (1998).

Para o desenvolvimento da pesquisa, escolhemos as perspectivas cavaleira e axonométrica isométrica, para discutir as regras que permitem formar uma representação sem ambiguidades - sem cair no pólo do sabido ou no pólo do visto - e a perspectiva cônica para discutir os pontos de fuga que aparecem, ou não, nas gravuras que escolhemos. Esperávamos, assim, colaborar com o processo de visualização nos sujeitos da pesquisa.

## **A PESQUISA**

Caracterizamos esta pesquisa como interventiva, com análise qualitativa dos dados. Para realizá-la, optamos por entrevistas semiestruturadas do tipo reflexivo, áudio-gravadas, pois queríamos criar uma situação de interação humana, passível de uma construção de conhecimento (SZYMANSKI, 2005) e que permitisse que o entrevistado pudesse refletir, à medida que é entrevistado, tornando possível, com esse movimento reflexivo, a discussão e a articulação de informações. Pudemos explorar um bom número de dados, provenientes das áudio-gravações e dos protocolos que foram gerados durante as entrevistas, na busca de respostas às nossas questões de pesquisa.

Foram realizadas duas entrevistas semiestruturadas, individuais, espaçadas por uma ou duas semanas, com cada um dos quatro alunos de uma 3ª série do Ensino Médio que aceitou participar da pesquisa. No espaço de tempo entre as duas

entrevistas, cada um dos sujeitos teve que responder algumas questões, a partir de duas gravuras que foram fornecidas a eles (Figura 3 e Figura 4).

### **Primeira entrevista**

A primeira entrevista foi realizada com o intuito de verificar se já tinham desenvolvido alguma das habilidades de visualização: são apresentadas 11 gravuras, escolhidas especialmente para despertar a sensibilidade do aluno para a necessidade de uma organização da representação, acompanhadas de seis questões. Colocamos, entre parênteses, algumas habilidades de visualização que julgamos possíveis de serem utilizadas para responder tal pergunta.

1. Você consegue descrever a cena real que está representada na figura? (discriminação visual)
2. Você percebe que organização o autor escolheu para a representação da cena? Descreva-a. (percepção de relações espaciais)
3. Você considera a organização escolhida adequada para a representação? Explique. (percepção de relações espaciais e discriminação visual)
4. Os vários elementos representados estão com os tamanhos adequados? (percepção de posições e relações espaciais)
5. Na figura, a noção de profundidade é evidente? Você identifica algum elemento especial que permita a visão da profundidade da cena representada? (rotação mental)
6. Entre as imagens, você pode selecionar a que melhor representa a cena descrita? (percepção de figura-de-fundo)

O aluno deveria descrever cada cena representada e, a partir da observação e da interpretação, responder as questões, por escrito.

Concluída esta fase, apresentamos a “Casa dos arames farpados” (Figura 2), uma fotografia de uma cena real, acompanhada de outro conjunto de perguntas, elaboradas para que cada sujeito, usando informações que possui de sua prática e do seu cotidiano, percebesse que o desenho pode sugerir “incongruências” entre o fato real e o que a imagem sugere (*pólo do visto*).



**Figura 2:** Casa dos arames farpados

Fonte: [www.baixaki.com.br](http://www.baixaki.com.br)

- O que você observa nesta representação? (discriminação visual)
- Era um dia de sol? Por que? (percepção de figura-de-fundo)
- Onde está o sol? Como você sabe? (rotação mental)
- Os arames estão encostados na casa? (percepção de posições e relações espaciais)
- O telhado da casa da frente parece estar encostado na casa do fundo. Isto é verdade? (percepção de relações espaciais)
- Observe a cumeeira do telhado da casa do fundo. Ela é paralela aos arames farpados? Estão no mesmo plano? (percepção de posições e relações espaciais)
- Em que posição está a árvore da esquerda? Ela está encostada na casa do fundo? Por que? (percepção de posições e relações espaciais, discriminação visual)
- Os galhos desta árvore parecem estar em cima da casa do fundo. Isto é verdade? (percepção de posições e relações espaciais)

Ao final da primeira entrevista, os sujeitos receberam duas gravuras (“Caça palavras” e “Elipsóides”) e, com cada uma delas, um conjunto de perguntas que deveriam ser respondidas em casa e trazidas para a segunda entrevista.

### Tarefa de casa

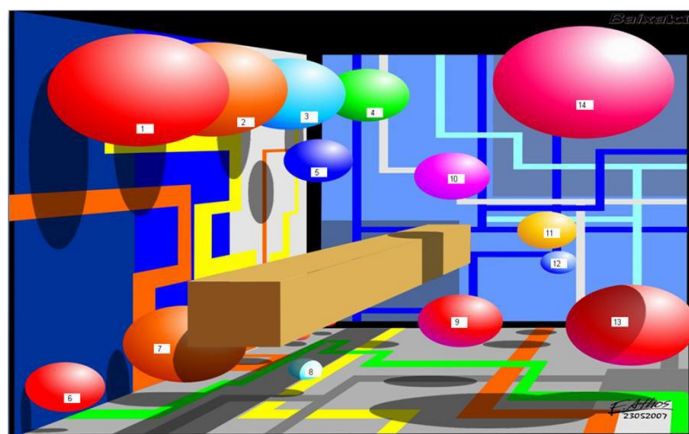
Com a gravura “Caça palavras” (Figura 3), as perguntas têm por objetivo provocar o processo matemático de visualização e o reconhecimento de regras da perspectiva paralela, que seria discutida na segunda entrevista.



**Figura 3:** Caça palavras  
Fonte: [www.baixaki.com.br](http://www.baixaki.com.br)

- Você conhece o objeto que o palhaço da direita está segurando em sua mão direita? Que nome você dá a ele?
- Existem mais desses objetos no quadro? Quais?
- O objeto maior (indicado pelo pesquisador) é formado por peças menores. Qual é o nome delas? Quantas são?
- Os palhaços estão sentados em cima de objetos que parecem enterrados na areia. Como você descreve estes objetos?

Com a gravura “Elipsóides” (Figura 4), as perguntas também têm a intenção de instigar o processo matemático de *visualização*, quanto às formas, aos tamanhos, às sombras, às posições e à existência de um foco de luz, que pode ser usado como ponto de fuga na perspectiva cônica, que seria discutida na segunda entrevista.



**Figura 4: Elipsóides**Fonte: [www.baixaki.com.br](http://www.baixaki.com.br)

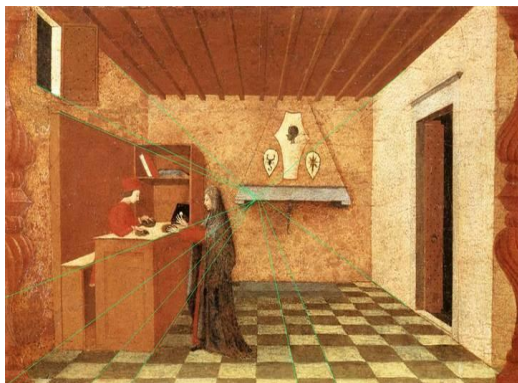
- O que você observa neste quadro? (percepção de relações espaciais, discriminação visual)
- Você percebe que tem uma fonte de luz? Em que posição esta se encontra? Por que você acha isso? (rotação mental, percepção de posições e relações espaciais)
- Todos os elementos são do mesmo tipo? (constância perceptiva, rotação mental)
- Todos são do mesmo tamanho? (percepção de relações espaciais)
- O que são as manchas cinza que podemos ver na figura? (percepção de posições e relações espaciais)
- Na medida do possível, ordene as figuras semelhantes de acordo com o tamanho, da menor para a maior, observando os números de cada uma. (discriminação visual)
- Se estes objetos fossem caixas e pudessem ser colocados um dentro do outro como ficaria? Justifique sua resposta. (percepção de posições espaciais)
- Quantos objetos temos? Quantas manchas cinza temos? (percepção de figura-de-fundo)
- Observe o objeto nº 5. Qual é a sombra dele? Explique. (percepção de posições e relações espaciais)
- Os objetos de números 1, 2, 3 e 4 possuem o mesmo tamanho? Por quê? (discriminação visual)
- O objeto nº 12 é maior ou menor que o objeto nº11? Por quê? (percepção de relações espaciais)
- Qual a posição relativa dos objetos 9 e 14? Por quê? (percepção de relações espaciais)
- O objeto nº 4 é maior ou menor que o nº 5? Por quê? (percepção de relações espaciais)



- O bloco retangular que se encontra flutuando produz uma mancha cinza. Essa mancha cinza representa que figura geométrica? (rotação mental, percepção de figura-de-fundo)
- Observe as faixas coloridas de branco, azul claro e azul escuro. O que você observa a respeito dessas faixas? Descreva o que você observa. (discriminação visual)
- Em relação às outras faixas, o que você observa? Descreva o que você observa. (discriminação visual)

### Segunda entrevista

No início da segunda entrevista, apresentamos a gravura “O milagre da hóstia” (Figura 5), com o intuito de provocar perguntas relacionadas às retas que convergem para um ponto de fuga e retomamos o mesmo conjunto de questões da primeira entrevista (p.98). Iniciamos, assim, uma discussão sobre a perspectiva cônica, os pontos de fuga e a necessidade que fez surgir, ao longo do tempo, regras “matemáticas” para melhorar a representação e facilitar a visualização nas obras de arte. Apresentamos novamente as 11 gravuras da primeira entrevista, perguntando aos sujeitos se viam, nestas, as mesmas características da nova gravura.



**Figura 5:** O milagre da hóstia  
Fonte: [www.ricardocosta.com](http://www.ricardocosta.com)

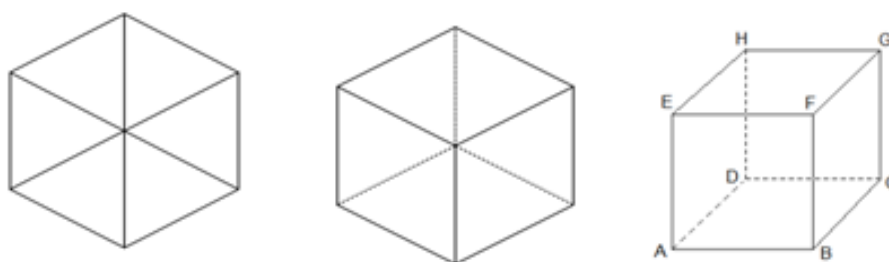
Comentamos que grande parte das representações artísticas são feitas em perspectivas cônicas de três tipos: com um, dois ou três pontos de fuga e apresentamos imagens para que o aluno conhecesse desenhos com essas características. Entre estas, colocamos um cubo, com um, dois e três pontos de fuga,



para mostrar que este tipo de representação, para a Matemática, pode ficar inadequado, pois as regras podem ficar muito sofisticadas para um trabalho didático em sala de aula da Educação Básica.

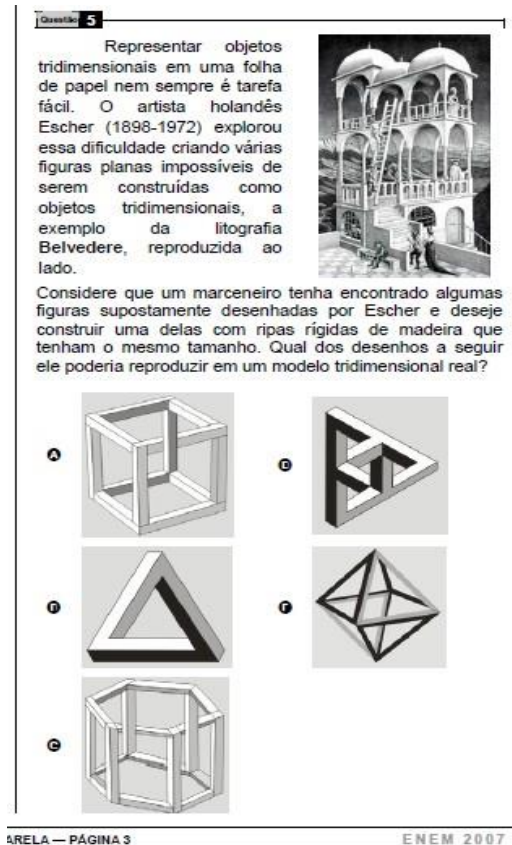
Retomamos a gravura “Elipsóides” (p.101), colada numa cartolina, traçamos retas paralelas às sombras e aos elipsóides para localizar o foco de luz, acima e à direita, numa verificação da resposta correta à pergunta sobre esse foco, da tarefa individual de casa. Para a “Casa dos arames farpados” (p.99) observamos, juntamente com cada um dos alunos, que entre a casa e o arame existe um chafariz e poderíamos ver a sombra do arame na casa, caso este estivesse encostado nela.

Usamos a figura cubo para comentar que as perspectivas paralelas dividem-se em duas, a cavaleira e a axonométrica (e esta em isométrica, dimétrica e trimétrica) e que as mais usadas em Matemática são a cavaleira e a axonométrica isométrica. Com isto, apresentamos para os sujeitos, separadamente e nessa ordem, os desenhos da Figura 6 (p.103) para: verificar se as viam como cubos ou hexágonos; saber se o tracejado do Hexágono II “facilita” a visualização do cubo; retomar a representação axonométrica isométrica (Hexágonos I e II), pedindo aos alunos que numerassem as faces do cubo, como se estes fossem um dado; introduzir as regras da perspectiva cavaleira, que é a mais usada em livros didáticos brasileiros. Perguntamos ainda se já tinham vivido estas discussões anteriormente e se estas ajudariam, a partir de agora, em suas atividades matemáticas de Geometria.



**Figura 6:** Hexágono I Hexágono II      Cubo, representação cavaleira  
Fonte: Acervo pessoal

Perguntamos se já tinham vivido estas discussões anteriormente e se estas ajudariam, a partir de agora, em suas atividades matemáticas de Geometria; para finalizar a segunda entrevista, mostramos uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM/2007) (p.103), pedindo que a respondessem.



**Figura 7:** Questão nº 5, ENEM/2007  
Fonte: MEC

## ANÁLISE

Na primeira entrevista, observamos que três dos entrevistados se ativeram mais aos detalhes da situação ou cena representada do que à sua organização, com poucas observações relacionadas à proporcionalidade dos objetos representados ou aos recursos utilizados para dar profundidade à representação. O quarto aluno fez observações mais interessantes, usando, por vezes, sua habilidade de discriminação visual, comparando a relação entre os tamanhos das pessoas representadas e a sua atribuída importância no contexto da cena. Embora tenha admitido dificuldade para identificar profundidade e utilizado pouco a habilidade percepção de posições e relações espaciais, afirma que “acredita que o fundo da imagem representa essa profundidade”. Consegue diferenciar o tamanho das pessoas e dos objetos (discriminação visual), mas baseia-se no pólo do visto e não utiliza a ideia de profundidade, pois faz as comparações do tipo grande ↔ perto, pequeno ↔ longe, independentemente da organização escolhida pelo autor da gravura. Numa delas,

percebe que o ambiente é pequeno para o tamanho das mulheres que estão representadas e faz comparações, usando sua habilidade de discriminação visual, mas apresenta dificuldades para identificar algum elemento que permita a visão de profundidade. As habilidades percepção de posições e relações espaciais foram pouco usadas.

Em geral, percebemos que os alunos observam as figuras mais pelo lado social da representação, sem fazer ligação com a Matemática implícita nas questões que formulamos e identificam proporcionalidade ou recursos de profundidade nas representações apenas em respostas isoladas, sem evidenciar o conhecimento de regras para tal. Consideram a organização parcialmente adequada ou não adequada, nos casos em que as imagens possuem tamanhos variados e adequada quando são do mesmo tamanho, provavelmente por estarem representadas mais de acordo com as regras da perspectiva cônica, mas baseiam-se no pólo do visto, sem justificar matematicamente as afirmações. Conseguem identificar profundidade, por exemplo, pela sombra projetada na parede do fundo e percebemos que começam a usar as habilidades percepção de posições e relações espaciais. Para a “Casa dos arames farpados” (p.99), que discutimos como prévia das tarefas para casa, observamos a utilização das habilidades percepção de posições e relações espaciais para localizar a posição do Sol e dizer que o arame se encontra mais próximo do observador do que da casa e os telhados das casas não estão encostados. Percebemos que a observação baseia-se no pólo do sabido quando afirmam que entre as casas e as árvores existe uma certa distância, pois são imagens que já se encontram em seu repertório de imagens. Quanto ao paralelismo entre o arame e a cumeeira, observa-se o desconhecimento sobre o que seja estar no mesmo plano ou as definições de paralelismo.

Em relação às discussões desencadeadas na segunda entrevista, apresentamos as respostas de um dos alunos, por serem um bom exemplo dos resultados que obtivemos com nossa intervenção.

Quando apresentamos a gravura “Caça palavras” (p.100), percebemos que a imagem do cubo já fazia parte do repertório de imagens do aluno, que respondeu e localizou os objetos com facilidade, usando as habilidades constância perceptiva, percepção de posições espaciais e percepção de relações espaciais. O aluno contou

corretamente os cubinhos, usando a habilidade rotação mental para incluir os menores e a percepção de posições e relações espaciais para localizar os que faltam.

Na gravura “Elipsóides” (p.95), percebeu que a fonte de luz está localizada à direita, no alto e conseguiu diferenciar os objetos e ordená-los quanto ao tamanho e tipos, por meio das habilidades percepção de posições e relações espaciais e discriminação visual, embora pareça basear-se no pólo do visto, quando afirma que o objeto 4 é maior do que o objeto 5, pois “visualmente é a ideia que se dá”. Ao comparar a quantidade de objetos com a de sombras, usou a habilidade percepção de posições e relações espaciais e não percebeu que abaixo do bloco retangular há três sombras, provocadas por objetos escondidos aos olhos do observador. Identificou a sombra deste bloco como um retângulo e não como o paralelogramo que é, o que nos faz concluir que se baseia em informações pré-existentes e não na representação em si, o que mostra falta de habilidades de visualização.

Com a gravura “O milagre da hóstia” (p.102), notamos que o aluno usou o termo proporções baseando-se no polo do visto, pois afirmou: “sim, tudo parece estar nas suas devidas proporções”, sem usar a ideia de proporcionalidade. Identificou a profundidade pela observação do piso desenhado na gravura e parece ter entendido o que é a profundidade, utilizando as habilidades percepção de posições e relações espaciais; mas não percebeu a existência das linhas verdes convergindo para o ponto de fuga e, ao chamarmos a atenção para este, chamou-o ponto de visão, talvez por ter estudado este tipo de representação em aulas de Arte, embora afirme desconhecer a projeção cônica. Demos as regras para as representações cônicas e argumentamos que é um dos recursos que podemos usar para “enxergar” a profundidade que, segundo ele, ficou mais fácil identificar pelo conhecimento das regras, apesar de sentirmos um pouco de insegurança em sua resposta.

Após estas explicações, voltamos às primeiras gravuras e perguntamos quais apresentavam características semelhantes às linhas verdes da gravura “O milagre da hóstia” (p.102).

O aluno ora respondia ser cônica ora não, ficando com dúvida em algumas delas. Explicamos novamente a representação cônica com um ponto de fuga e o aluno aparentou entender, pois nas gravuras seguintes identificou-o corretamente. Com o conhecimento adquirido sobre as representações cônicas com um ponto de fuga, o

aluno passou a observar as gravuras procurando encontrar este ponto, embora algumas delas não o possuíssem e começou a analisar as representações não só pela parte artística, mas também pela parte matemática. Percebemos que começou a assimilar as ideias que estávamos discutindo, iniciando um processo de visualização. Usou algumas vezes as habilidades percepção de posições e relações espaciais que, acreditamos, poderão ser mais desenvolvidas numa continuação do trabalho que iniciamos.

Para finalizar a segunda entrevista – e nossa intervenção com este aluno - apresentamos uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM/2007, p.104), que o aluno resolveu corretamente, apontando a alternativa E como a única possível e ainda fez algumas observações sobre as demais alternativas, em que as madeiras estavam “entrelaçadas”, não sendo possível a construção. Ao ser perguntado se o conhecimento das regras de representação ajudou a responder a questão, disse que sim, pois sem esse conhecimento teria ficado em dúvida entre as alternativas A e C.

## CONCLUSÕES

As estratégias supracitadas destinaram-se a responder nossas questões de pesquisa:

*“A utilização de imagens externas variadas pode ajudar no desenvolvimento de habilidades de visualização?”*

*“Quais habilidades de visualização podem ser desenvolvidas com a análise dessas imagens?”*

A análise dos protocolos, das observações escritas e das áudio-gravações fez-nos concluir que a utilização de imagens externas variadas pode ajudar no desenvolvimento de habilidades de visualização (GUTIERREZ, 1998; PARZYSZ, 1988). Como as regras de representação não são explicitadas em sala de aula, os alunos observam as representações pelo pólo do visto e mostram dificuldades em visualizar representações planas de figuras espaciais. No entanto, constatamos, nas respostas dos alunos, evidências da habilidade percepção de figura-de-fundo e que são capazes de comparar vários objetos, imagens e/ou imagens mentais para

identificar semelhanças e diferenças entre eles, ou seja, uma manifestação da habilidade discriminação visual. Estas habilidades foram evidenciadas pelos alunos entrevistados na análise das gravuras, principalmente durante a segunda entrevista.

A habilidade constância perceptiva, que é a capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto são independentes do tamanho, cor, textura ou posição, é percebida em diferentes manifestações; as habilidades rotação mental, percepção de posições espaciais e percepção de relações espaciais precisam ser mais desenvolvidas, por meio de práticas em salas de aula de Matemática. No decorrer da entrevista, ao explicitarmos as regras de representação de perspectiva paralela cavaleira, perspectiva paralela axonométrica isométrica e darmos uma noção de perspectiva cônica, percebemos que nossos sujeitos começaram a se apropriar desse novo conhecimento, o que facilitou as observações que fizeram posteriormente.

A princípio, esses alunos não reconheceram esta pesquisa como pertencente à área de Matemática, pelo fato de não envolver diretamente cálculos e por não estarem familiarizados com esse tipo de atividade na escola. Julgamos que cabe a esta o papel de desenvolver um trabalho que provoque o processo de visualização; como este se desenvolve com o tempo, a escola pode e deve propiciar esse tempo, de modo a garantir que os processos de ensino e de aprendizagem ocorram e o aluno passe a enxergar e vivenciar a Matemática não apenas como um momento em que aprendemos (ou não) a fazer contas, decorar fórmulas e resolver problemas.

Consideramos que a elaboração de um projeto interdisciplinar nas áreas de Matemática e Artes pode ser uma estratégia para os alunos interagirem esses dois componentes curriculares. Percebemos que o processo de visualização, pelo uso de gravuras artísticas, facilitou a inserção de alguns conteúdos de Matemática e propiciou uma utilização prática e importante dos estudos em Geometria Espacial, numa perspectiva de melhoria na qualidade das aulas de Matemática e, conseqüentemente, na aprendizagem dos alunos.

## REFERÊNCIAS

Baixaki. (n.d.). *Papel de parede (p.-d.-p.)*. [Disponível em <http://www.baixaki.com.br/papel-de-parede/c8-lugares-e-paisagens.htm>, consultado em 29/04/2009].

- Brasil. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio, vol. 2*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC.
- Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.
- Costa, K. R. (2007). *A Entrevista Reflexiva a partir do Registro de Observação: possibilidade de formação continuada de professores*. Dissertação de Mestrado (não publicado), Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Psicologia. Uberlândia: UFU.
- Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional Geometry. In search of a framework. *Proceedings of 20th PME Conference*, 1, pp. 3-19. Valencia: PME.
- Gutierrez, A. (1998). Las Representaciones Planas de Cuerpos 3-dimensionales en la Enseñanza de la Geometria Espacial. *Revista EMA*, 3 (3), 193-220.
- Kodama, Y. (2006). *O estudo da perspectiva cavaleira: uma experiência no ensino médio*. Dissertação de Mestrado (não publicado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo: PUC-SP.
- Miranda, S. S. (2006). *O papel da Geometria Descritiva nos problemas de Geometria Espacial: um estudo das secções de um cubo*. Dissertação de Mestrado (não publicado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo: PUC-SP.
- Parzysz, B. (1988). "Knowing vs Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, pp. 72-79.
- Parzysz, B. (1989). *Répresentations planes et enseignement de la Géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse de Doctorat, Université de Paris VII, Paris.
- Rosalves, Y. M. (2006). *Relações entre os pólos do visto e do sabido no Cabri 3D: uma experiência com alunos do ensino médio*. Dissertação de Mestrado (não publicado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo: PUC-SP.
- São Paulo. (2008). *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.
- Yunes, M. Â. & Szymanski, H. (2005). Entrevista Reflexiva & Grounded Theory: Estratégias Metodológicas para a Compreensão da Resiliência em Famílias. *Revista Interamericana de Psicologia/Interamerican Journal of Psychology*, 39 (3), 431-438.

Submetido: Abril 2014

Aceito: Junho 2014