

Evaluación del Conocimiento y Argumentación Adquiridos por Futuros Profesores de Matemática de Educación Secundaria sobre Aleatoriedad

Knowledge Evaluation and Argumentation Acquired by Future Teachers Of Secondary Education Mathematics on Randomness

Francisco Rodríguez-Alveal^{*a}; Danilo Díaz-Levicoy^b

^aDepartamento Ciencias de la Educación de la Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile.

^bFacultad de Ciencias Básicas de la Universidad Católica de Maule, Chile

*E-mail: frodriguez@ubiobio.cl

Resumen

En el presente artículo, de naturaleza mixta, busca describir los conocimientos y los argumentos estadísticos que declaran futuros profesores de matemática de Educación Secundaria sobre situaciones aleatorias. Para ello, se analizó la percepción de 23 futuros profesores hacia la estadística, así como los argumentos entregados frente a dos situaciones aleatorias propuestas por Green (1989). La primera situación analiza la disposición entregada por cuatro estudiantes sobre la aparición de números del 1 al 16 en una cuadrícula de 16 espacios. La segunda actividad evalúa si los vectores de datos del lanzamiento de 40 monedas realizadas por dos estudiantes se modelaban de manera aleatoria. Los resultados permitieron observar que los futuros profesores no declaran elementos teóricos acerca de los modelos estadísticos presentes en las actividades propuestas tendientes a tomar una decisión, como así también los argumentos entregados carecen de fundamentación teórica.

Palabras-clave: Formación de Profesores. Evaluación. Aleatoriedad. Didáctica de la Estadística.

Abstract

In this article, mixed nature analyzes the perception of teachers in training towards statistics and the arguments given about two random situations to which they were subjected. Thus, the objective of the research was to describe the knowledge and statistical arguments about the random situations proposed by Green (1989). The study involved 23 teachers in training who had to answer two questions; the first was to study the provision given by four students of the appearance of numbers listed from 1 to 16 in a grid of 16 spaces. Similarly, the second activity consisted in evaluating whether the data vectors of the launch of 40 legal currencies made by two students were randomly modeled. The results allowed us to evaluate that the teachers in training do not present theoretical foundations about the statistical models present in the proposed activities tending to make a decision, as well as the arguments given lack theoretical foundation.

Keywords: Teacher Training, Evaluation. Randomness. Didactics of Statistics.

1 Introducción

Para Vezub (2016) “existe un diagnóstico extendido que alerta sobre la falta de calidad y pertinencia de la formación inicial y la necesidad de acercarla a las demandas reales de la profesión” (p. 2). En este contexto, el aprendizaje de la probabilidad, como mencionan Behar y Yepes (2007), es un tema complejo que está adquiriendo gran importancia dentro de la temática de la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad. Además, el currículo escolar de Educación Primaria y Secundaria en Chile hace mención de manera tangencial al concepto de aleatoriedad, como se evidencia en los estándares del Ministerio de Educación (MINEDUC) que guían la formación de profesores. Por un lado, según los *Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica*. Estándares pedagógicos y disciplinarios (MINEDUC, 2012a), los profesores de Educación Primaria, al finalizar su formación deben:

(...) conoce[r] en profundidad los contenidos del eje de Datos y Probabilidades del currículo escolar respecto de Probabilidades. Domina[r] conceptos básicos de este tema que le permiten analizar y describir fenómenos aleatorios, cuantificando y representando la probabilidad de ocurrencia

de eventos, y presentar el tema de Probabilidades como herramienta matemática que sirve para modelar el azar y que aporta a la toma de decisiones (p. 113)

Del mismo modo, el que egresa como profesor de matemática de Educación Secundaria, según los Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Media (MINEDUC, 2012b), debe “estár[r] preparado para conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas y la modelación de fenómenos con incerteza, incluyendo técnicas de representación, de conteo, de cálculo de probabilidades y el uso de simulaciones (p. 126)

Los estándares mencionados recientemente (MINEDUC, 2012a, 2012b) reflejan la importancia de contar con profesores con una sólida formación en probabilidad (Rodríguez-Alveal, Díaz-Levicoy, Vásquez, 2018).

Por otro lado, atendiendo a la implementación de la Ley 20.903 (MINEDUC, 2016), todos los futuros profesores deben someterse a la Evaluación Nacional Diagnóstica (END), que tiene por objetivo conocer la calidad de la formación entregada por las instituciones formadoras y generar actividades tendientes a remediar los déficits que presentan antes de ingresar al mundo laboral, es decir, es una instancia

que permitiría cautelar la calidad de la formación recibida.

Los resultados de la END evidencian que los futuros profesores de matemática alcanzan bajos niveles de logro en los tópicos asociados a estadística y probabilidad, lo que repercute negativamente en el desarrollo profesional. Al respecto, Behar y Yapes (2007) expresan que los profesores de matemática tienen dificultades para enseñar estadística en el aula. Es decir, existe una brecha entre los contenidos y habilidades desarrollados durante la formación inicial y lo que debe conocer y enseñar en el sistema escolar.

Por ello, la formación de los futuros profesores de matemática debe asegurar el desarrollo de la competencia profesional que les permita abordar la enseñanza de las ideas fundamentales de la estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2004); entre las que se encuentra la aleatoriedad, considerada como un contenido transversal del currículo de Estadística.

Este estudio cobra relevancia, por lo mencionado en Even y Ball (2009):

- Los profesores cumplen un rol fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en los estudiantes de los diferentes niveles de formación.
- La formación que reciben los futuros profesores es un elemento clave para la construcción de un sistema efectivo en la enseñanza de la matemática.
- La formación de profesores en general, y de matemática en particular, es una problemática que presenta grandes desafíos, tanto para las instituciones formadoras para la sociedad.

De acuerdo con estas consideraciones, el presente trabajo pretende evaluar los conocimientos adquiridos sobre aleatoriedad por futuros profesores de matemática de Educación Secundaria.

2 Fundamentos

La tendencia internacional de incluir la estadística y la probabilidad en el currículo escolar desde los primeros cursos de Educación Primaria, incluso de Educación Infantil, buscando desarrollar ciudadanos cultos en estas áreas, para desenvolverse eficazmente en el siglo XXI (Villardón-Gallego, Yániz, Achurra, Iraurgi y Aguilar, 2013), producto de la gran cantidad de información con la que se interactúa diariamente y son necesarias para la tomar decisiones acertadas. Solbes y Torres (2012) relacionan estos tópicos al desarrollo del pensamiento crítico.

En este contexto, uno de los conceptos clave es el de *aleatoriedad*, considerado que uno de los descubrimientos decisivos del siglo XX fue la constatación de que el mundo no es determinista (Hacking, 1990).

Entre las definiciones de aleatoriedad se encuentra la de Ayer (1974), quien menciona que un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo al cálculo de probabilidad, definición que hace notar la relación biunívoca entre aleatoriedad y el cálculo de probabilidad. En cambio, Kolmogorov (citado en Batanero y Serrano, 1995) indica que una secuencia es aleatoria si presenta una complejidad computacional, es decir, no se puede codificar de una forma

simple utilizando la menor cantidad de caracteres.

Sin embargo, Batanero (2000) afirma que la comprensión de un concepto no puede reducirse a conocer las definiciones y propiedades, sino que debe abarcar:

1. El reconocimiento de los problemas donde debe emplearse el concepto, las notaciones y palabras con que se lo denota y en general todas sus representaciones,
2. La habilidad operatoria en los diferentes algoritmos y procedimientos relacionados con el concepto, y
3. La capacidad de argumentar y justificar propiedades, relaciones y soluciones de problemas.

2.1 Aleatoriedad y modelización en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad

La modelización de situaciones concretas es un paso inevitable en el aprendizaje científico y un poderoso instrumento para la enseñanza de la probabilidad (Serrano, Ortiz y Rodríguez, 2009), por lo que la enseñanza de fenómenos estocásticos debe incorporar la modelización como una herramienta fundamental, donde las simulaciones juegan un rol fundamental (Heitele, 1975), donde los software estadísticos deben utilizarse para promover el desarrollo cognitivo en el aprendizaje de la estadística (Inzunza, 2015).

Al respecto, Batanero y Serrano (1995) presentan tres procesos que permiten generar sucesiones aleatorias: dispositivos físicos, tablas de números aleatorios y la generación de números pseudoaleatorios. De los cuales, solamente los dispositivos físicos, como elegir una bola de una tómbola o las ruletas, estas últimas son mencionadas en los libros de texto chilenos entregados por MINEDUC (Díaz-Levicoy y Roa, 2014), proceso que tiene como inconveniente la generación de secuencias largas de resultados aleatorios.

Por su parte, los generadores de números pseudoaleatorios permite obtener números aleatorios con la ayuda de algoritmos que poseen los programas computacionales, particularmente Excel, mediante las funciones *aleatorio*, entrega números aleatorios entre cero y uno, y *aleatorio.entre* entrega entre dos números establecidos por el usuario. Estos procesos, como manifiesta Sadovsky (2014), permiten a los estudiantes poner a prueba los conceptos que aprenden, que puedan validar lo que hacen y que tengan la oportunidad de corregir sus propias producciones.

Finalmente, Girard (1997) menciona que las simulaciones permiten trabajar aspectos del modelado, porque simplifican la realidad, fijan los aspectos de lo que se quiere simular y especifican una hipótesis matemática sobre el fenómeno estudiado.

3 Metodología

3.1 Diseño del Estudio

La investigación considera la complementariedad metodológica, por lo que se utilizaron métodos mixtos de recolección de datos mediante instrumentos cuantitativos y cualitativos. Esta integración hace posible que un método

compense la debilidad de otro, al tiempo que estos facilitan la interpretación de los datos y la triangulación del análisis, lo que, a su vez, aumenta la confianza y validez de los resultados (Cornejo, Sanhueza y Rioseco, 2012).

En relación con las técnicas cualitativas, se analizar las narrativas de los futuros profesores. Los fragmentos de texto de unidad variable configuran ideas básicas a través de las cuales se apoyan y articulan sus experiencias (Blanco y Barrantes, 2003). La fase cuantitativa consistió en un diseño descriptivo comparativo y analítico que permita indagar la percepción que tienen los futuros profesores según la escala de actitudes hacia la probabilidad de Estrada y Batanero (2015). En resumen, mediante este paradigma mixto se pretende comparar las habilidades asociadas a la comprensión del concepto aleatoriedad base de la alfabetización probabilística, presentes en los estudiantes en Formación Inicial Docente de una universidad del centro sur del país.

3.2 Participantes y contexto

Para efectos del estudio se consideró un muestreo intencionado por disponibilidad (McMillan y Schumacher, 2005). La muestra estuvo compuesta por 23 futuros profesores del octavo semestre de carrera (Pedagogía en Educación Matemática con una duración total de diez semestres académicos) de una universidad del centro-sur de Chile, institución con más de cuatro décadas formado profesores del sistema escolar chileno. Para identificarlos a lo largo del escrito usaremos el código FP acompañado del número asignado al futuro profesor.

Los participantes en su mayoría (57%) han cursado su Educación Secundaria en establecimientos educacionales con subvención del Estado y solamente un 22% aproximadamente en establecimientos Municipales. Desde el punto de vista socioeconómico, el 52% de los futuros profesores recibe aporte del Estado para el pago de matrícula y/o arancel en sus estudios, es decir, estudian con gratuidad su Educación Superior, antecedente que acredita, que se trata de un grupo que en general ostenta un bajo nivel socioeconómico.

Todos los futuros profesores participaron de manera voluntaria, siguiendo el protocolo de confidencialidad de información acorde a las políticas institucionales, como parte de una actividad formativa de la asignatura *Didáctica de la Estadística* en el año académico 2019.

3.3 Instrumentos

Para este estudio se consideró la aplicación de dos instrumentos, el primero corresponde a escala de la actitud hacia la probabilidad y su enseñanza (Estrada y Batanero, 2015), cuestionario tipo Likert con cinco opciones de respuesta (Muy de acuerdo, de acuerdo, indiferente, en desacuerdo, muy en desacuerdo). Para efectos del estudio se consideraron solamente los reactivos del Componente de competencia cognitiva apreciada hacia la probabilidad

(CCAP), Componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad (CAEP), Componente de competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad (CDEP), Componente de valor hacia la probabilidad y su enseñanza (CVPE). En la siguiente tabla se muestran los aspectos evaluados.

Tabla 1 - Componentes de la Escala consideradas en el estudio (Estrada y Batanero, 2015)

Componente	Reactivo
CCAP	6. La probabilidad es fácil.
	8. Domino los principales contenidos de probabilidad.
	17. La probabilidad es comprensible solo para la "gente de ciencia".
	22. No me siento lo suficientemente bien preparado para resolver cualquier problema de probabilidad básica.
CAEP	9. Estoy seguro de que disfrutaré enseñando probabilidad en la escuela.
	21. Me preocupa poder responder a las preguntas de mis alumnos sobre la probabilidad.
	26. No estoy interesado en enseñar probabilidad, incluso si aparece en el plan de estudios.
	28. Como profesor me sentiría cómodo al enseñar probabilidad.
CDEP	3. Me será difícil enseñar la probabilidad.
	10. Creo que puedo notar y corregir los errores y dificultades de los estudiantes en relación con la probabilidad.
	14. Me será fácil diseñar tareas de evaluación relacionadas con la probabilidad.
	23. No podría preparar los recursos didácticos adecuados para la lección de probabilidad.
CVPE	4. La probabilidad ayuda a entender el mundo de hoy.
	12. La probabilidad solo es útil para los juegos de azar.
	13. La probabilidad no es tan valiosa como otras áreas de las matemáticas.
	19. El conocimiento de la probabilidad ayuda a los estudiantes a razonar críticamente.

El segundo instrumento se compone de dos situaciones hipotéticas asociadas a fenómenos aleatorios utilizadas por Green (1989). La primera consiste en estudiar el comportamiento aleatorio de seleccionar una de dieciséis fichas numeradas (Figura 1), y decidir quién(es) de los cuatro estudiantes (Jaime, María, Miguel o Luis) lo realizaron correctamente.

Figura 1 - Enunciado actividad 1

Actividad 1: Pablo juega a un juego en el que se dispone de 16 fichas numeradas del 1 al 16. Pone las fichas en una bolsa vacía. Después de mover la bolsa con fuerza para mezclar las fichas, elige una ficha con los ojos cerrados. Es la ficha número 7. Pablo pone una cruz en la casilla 7 y devuelve la ficha a la bolsa, antes de continuar el juego.

competencia cognitiva, en general declaran *no sentirse lo suficientemente preparados para resolver cualquier problema asociado a probabilidad básica* ($4,3\pm 1,0$), aun cuando los encuestados han realizado durante su formación inicial dos asignaturas relacionadas con tópicos estadísticos en los cuales han trabajado temas relacionados con probabilidad, estadística descriptiva e inferencia estadística.

De manera similar, en el componente afectivo hacia la enseñanza de la estadística, ellos muestran que *no están interesados en enseñar probabilidad a sus futuros estudiantes* ($4,3\pm 1,1$), aun cuando esta temática está declarada en el currículo chileno, escenario que repercutiría en las futuras generaciones en la formación de ciudadanos probabilísticamente alfabetizados, capaces de leer, argumentar y tomar decisiones en base a información proveniente de un mundo de incertidumbre (Hacking, 1990).

Asimismo, en el componente de valor hacia la probabilidad y su enseñanza, para los futuros profesores, *la probabilidad es solamente útil para los juegos de azar* ($4,1\pm 1,2$), lo que devela que las situaciones problemáticas abordadas durante su formación profesional se centraron esencialmente en este tipo de actividades, aunque los juegos son los principales contextos en el que los niños pueden comprender las características de las situaciones aleatorias (Batanero, 2005), en cambio los futuros profesores deberían tener presente que probabilidad es un tópico que va más allá de este tipo de actividades.

De igual modo, concuerdan con que la probabilidad no es tan valiosa como otras áreas de la matemática, es decir, es una temática que se encuentra en un segundo lugar, la cual es superada por tópicos como cálculo, algebra o geometría. Pese a que las investigaciones evidencian que la probabilidad permite modelar un mundo de incertidumbre.

A manera de resumen, la Tabla 3 nos muestra los promedios de las cuatro componentes abordadas en este estudio. En ella se observa que no existen diferencias estadísticamente significativas entre los componentes CCAP y CAEP y CVPE, situación que evidenciaría que los futuros profesores no discrepan entre los componentes relacionados con la competencia cognitiva hacia la probabilidad, el componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad y el valor hacia la probabilidad y su enseñanza. Este escenario tensionaría el actuar como profesor del sistema escolar al momento de enseñar los contenidos relacionados con probabilidad, lo que no permitiría alfabetizar probabilísticamente a sus estudiantes.

Tabla 3 - Promedio de la puntuación total de los futuros profesores

	CCAP	CAEP	CDEP	CVPE	p-valor
Puntuación promedio	$3,2\pm 0,4_a$	$2,9\pm 0,5_a$	$2,4\pm 0,3_b$	$3,0\pm 0,6_{ac}$	0,00
Letras igual indican que no existen diferencias significativas al 5%.					

4.2 Modelando fenómenos aleatorios

Actividad 1

En relación con las estrategias propuestas en la actividad 1, el 60,9% de los futuros profesores comunican implícitamente que realizarían simulaciones para tomar la decisión acerca de qué estudiantes efectuaron correctamente el trabajo encomendado por el profesor. Algunos de estos argumentos son:

Volver a realizar el juego reiteradas veces para tener un mejor muestreo y ver qué es lo menos probable que ocurra para saber quién hizo “trampa” (FP 4).

Propondría realizar en conjunto las 16 veces que se elija una ficha, es decir, que todos pasen una vez y anoten sus números, así la segunda vez nuevamente y así sucesivamente hasta llegar a las 16 veces que se elige una ficha, y de esa forma, no se haría trampa (FP 6)

La estrategia sería la simulación del experimento una cantidad de veces determinada, porque de esta forma podríamos observar las frecuencias en que salen las fichas y su repetición. De esta manera se observa como ocurre el ejercicio (PF 21)

En estos se hace mención a conceptos como muestreo y probabilidad desde una mirada intuitiva, para que los estudiantes no hagan trampa. En cambio, el tercer relato expresa de manera explícita hacer uso de software computacional para comparar los resultados empíricos entregados por los *Jaime, María, Miguel y Luis*, para tomar una decisión al respecto.

Los futuros profesores no entregan argumentos teóricos acerca de los alcances de la simulación en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad, pese a que este proceso juega un rol fundamental al estudiar el comportamiento de ciertos fenómenos, particularmente los relacionados con aleatoriedad. Tampoco hacen mención a algún software educativo, del tipo interactivo, que permita a los estudiantes adaptarse al ritmo de cada uno (Cabero-Almenara y Costas, 2016), como Excel o Geogebra presentes en el currículo escolar chileno. Esto, a pesar de que la simulación y el aprendizaje son dos conceptos inseparables en el proceso educativo (Mason y Rennie, 2006).

Asimismo, los futuros profesores indican que para dar respuesta a la interrogante planteada deberían hacer tener presente contenidos estadísticos como la aleatoriedad, probabilidad, muestreo con y sin reemplazo. De los cuales, solamente el tópico relacionado con probabilidad se encuentra presente en los programas de asignaturas relacionadas con estadística y probabilidad que han cursado durante su formación profesional. En cambio, los otros contenidos como aleatoriedad y muestreo no se explicitan en ellos.

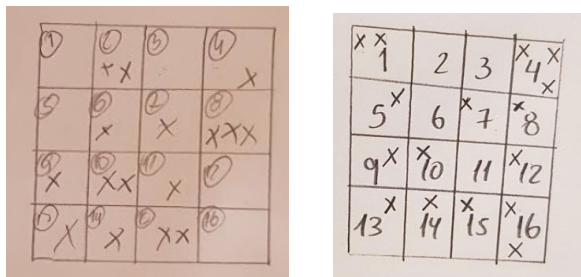
En relación con la pregunta planteada, acerca que, si los estudiantes realizaron la actividad acorde a lo solicitado por el profesor, en la Tabla 4 se muestra la distribución de las respuestas entregadas por los participantes.

Tabla 4 - Distribución de las respuestas entregadas por los futuros profesores relación con los estudiantes que no hicieron correctamente la actividad

Nombre de los niños que participaron del juego	Número	Porcentaje
Jaime		-
María		-
Miguel	5	21,7
Luis	11	47,8
Miguel y Luis	3	13,0
Ninguno de los alumnos	4	17,3

Además de indicar qué estudiantes hicieron correctamente la actividad se les pidió, a los futuros profesores, argumentar sus respuestas sobre la aleatoriedad. Al respecto, el 47,8% indicó que Luis no la efectuó como se le indicó, cuyos argumentos se basan en las siguientes simulaciones:

Figura 3 - Simulación realizada por dos estudiantes en base a un muestreo con reemplazo (FP 10 y FP 14)



Estas respuestas hacen notar que es *poco probable que salgan todas las bolitas distintas*, comentario que tiene implícito el significado *subjetivo* de probabilidad (Batanero, 2005), donde su valor depende del observador y de lo que este conoce del suceso en estudio. Como se advierte en los siguientes relatos entregados por los participantes del estudio:

Creo que el niño que hizo trampa fue “Luis” debido a que la probabilidad de que ocurra su situación tan baja si suponemos que fue al azar la recolección. Además, hubo una manipulación directa de ellos en la obtención del número, se puede asumir que el niño hizo trampa por los números obtenidos (FP 2).

Luis hizo trampa, pues en un muestreo con reemplazo es muy poco probable que salgan todas las bolitas distintas (FP 4).

Luis hizo trampa, ya que sería muy poco probable que en cada evento diera un resultado nuevo, es decir, que aparecieran todos los números al finalizar los 16 sucesos (FP 10).

Luis porque a pesar de que cada número tiene la misma probabilidad de ser elegido, es inusual que salgan los 16 números en los 16 intentos. (FP 14).

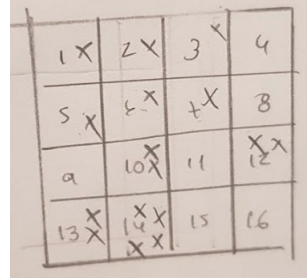
Siento que Luis hizo trampa, dado que la probabilidad de que salgan todos los números una vez, es muy poco probable (FP 8).

En general, los futuros profesores relacionan de manera intuitiva los conceptos de aleatoriedad y probabilidad de que ocurra un fenómeno, noción que tiene implícita la definición dada por Ayer (1974) acerca de que si un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo al cálculo de

probabilidades.

Hay un 21,7% de los futuros profesores que expresa que Miguel hizo trampas. Basando su respuesta en la simulación mostrada en la Figura 4.

Figura 4 - Simulación realizada por FP 21



Además, el futuro profesor apoya su respuesta con el siguiente argumento:

Miguel hizo trampa, dado que al simular el ejercicio se puede observar que hay una frecuencia de repetición de algunas fichas, así como hay fichas que salen una vez, como hay fichas que no salen, en el caso de Miguel su resultado es muy poco probable ya que se puede decir que es difícil que ocho fichas se repitan dos veces seguidas (FP 21)

Esta conclusión se apoya en una única simulación, donde este concepto está asociado a realizar repeticiones del mismo fenómeno, en las mismas condiciones, para visualizar tendencias y en base a ellas tomar una decisión. Pero, la comprensión adecuada de un concepto o fenómeno no puede limitarse solo a una simulación (Batanero, Henry, Parzysz, 2005).

Otro estudiante realiza un análisis intuitivo de la situación planteada, comentando en base a la representación entregada por Miguel.

Creo que Miguel hizo trampa, porque, el modelo que muestra su tablero no parece ser aleatorio (FP 13).

Solamente un 13% de los futuros profesores registra que tanto Luis como Miguel hicieron trampas. Al respecto, uno de los participantes comenta que:

Miguel hizo trampa debido a que le salieron solo ocho números y la misma cantidad de veces, es decir, dos veces el uno, dos veces el dos, etc. Además, Luis igual hizo trampa, debido a que le salió la misma cantidad de veces, ya que obtuvo todos los números, es decir, una vez el uno, una vez el dos y así sucesivamente. (FP 12).

De lo anterior, se desprende que la enseñanza de la probabilidad de los futuros profesores no ha modificado substancialmente las nociones iniciales que poseen sobre las distribuciones aleatorias. Cabe hacer notar, que a pesar que ellos han realizado dos asignaturas afines con estadística y probabilidad no hacen notar que la situación problemática se puede modelar teóricamente mediante la distribución Poisson de parámetro lambda igual a 1 ($\lambda=1$) y mediante una bondad de ajuste comparar lo observado con lo esperado por el modelo teórico. Lo que evidencia, que situaciones problemáticas de este tipo no fueron abordadas en la formación disciplinar,

develando que ellos tuvieron una formación procedimental la cual se basó esencialmente en el cálculo de probabilidades de variables aleatorias con distribución Poisson haciendo uso de tablas de distribuciones de probabilidad.

En la Tabla 5 muestra el modelamiento mediante la distribución teórica de Poisson y los resultados entregados por los respectivos participantes de la actividad.

Tabla 5 - Distribución de probabilidad y número esperado de cuadros con x puntos en la distribución de Poisson

Número de X por cuadrado	Número Esperado de cuadrados	Número de X en cuadrados de			
		Jaime	María	Miguel	Luis
0	6	7	8	8	0
1	6	4	3	0	16
2	3	3	3	9	0
3	1	2	1	0	0
4	0,2	0	1	0	0
Valor del Estadístico Chi ²		2,1	4,5	20,3	27,4

En dicha tabla, los valores comparados contra un valor de tabla ($\chi^2=9,49$), nos permite observar que los resultados entregados por *Jaime* y *María* se acerca al patrón esperado en una distribución aleatoria, en cambio los de *Miguel* y *Luis* no. En consecuencia, estos últimos estudiantes no realizaron la actividad como se solicitó, es decir, no jugaron correctamente. En coherencia con lo anterior, solamente el 13% de los futuros profesores habrían entregado una respuesta correcta a la actividad.

Actividad 2

En relación con la actividad 2, sobre el lanzamiento de una moneda legal 40 veces por dos alumnos (Juan y Pedro), los futuros profesores de matemática que participaron de esta investigación proponen para dar respuesta a la interrogante:

Para este caso sería ideal iniciar con una introducción al concepto de aleatoriedad, frecuencia relativa, consistencia e independencia, como a su vez enseñarles a identificar dichos conceptos en diferentes experimentos antes de que los educandos apliquen uno por sí mismos. Esto facilitara la comprensión de los estudiantes debido a que podrán comparar sus resultados con respecto a los explicados y analizados en la introducción o preparación previa a la actividad (FP 12) Una pequeña introducción al concepto de aleatoriedad y explicar un poco en que consiste, a su vez identificarla y así los alumnos tendrán menos probabilidad de error (FP 17) Hacer uso de la ley de Laplace (FP 22)

Asimismo, dos de los futuros profesores anteriores expresan, como segunda opción, realizar una prueba de racha, prueba no paramétrica que permite inferir si una secuencia es aleatoria o no. Por ejemplo, uno de ellos señala que esta prueba:

Sirve para determinar si una muestra de observaciones es o no aleatoria, es decir, si las observaciones de una determinada secuencia son independientes entre sí. En una serie temporal, por ejemplo, las observaciones no son aleatorias: lo que ocurre con una observación cualquiera depende, generalmente, de las características de una observación anterior. En una muestra aleatoria, por el contrario, debemos esperar que con lo que

ocurra con una observación cualquiera sea independiente de las características de la(s) observación(es) anterior(es). El concepto de rachas hace referencia a una secuencia de observaciones de un mismo tipo (FP 12).

En cuyo comentario hace mención a dos conceptos aleatoriedad e independencia, como si fueran isomorfos, lo que evidencia la falta de claridad entre ellos. No obstante, solamente uno declara que:

Según el concepto de aleatoriedad quien realizo correctamente el ejercicio ha sido Juan, esto se debe, pues a diferencia de Pedro, la sucesión de resultados de Juan es más compleja que la de Pedro, es decir, posee menos patrones (FP 17)

El argumento anterior carece de una justificación matemática. Otros, en cambio, hacen mención al uso de simulaciones de forma explícita o implícita:

La simulación permite observar el comportamiento o comportamientos que pueden tener estos eventos (FP 13). Realizar el mismo experimento varias veces y obtener una probabilidad de ocurrencia de caras y sellos y de acuerdo a eso basarme para saber si Pedro o Juan realizaron correctamente el experimento (FP 19). Hay que repetir el experimento varias veces para corroborarlo (FP 2).

Solamente 4 de los 23 futuros profesores hacen mención al uso de Excel, puntualmente de la función *aleatorio.entre*, para simular el experimento aleatorio de lanzar 20 veces una moneda legal. Por ejemplo:

En Excel se puede hacer el experimento a través de la función *aleatorio.entre* usando 1 (cara) y 0 como sello, realizando los cuarenta lanzamientos simulados, esto lo hacemos varias veces (FP 7) Utilizando Excel probar cual seria las posibilidades de caras y sellos del experimento y buscar su probabilidad y comparándolo con los hechos por Juan y Pedro (FP 15)

En base a las soluciones presentadas por los participantes del estudio, el 43,5% sugiere que Pedro no realizo correctamente la actividad, porcentaje que disminuye a un 34,8% para el caso de Juan, en cambio un 21,7% no toma una decisión en base a sus propuestas de análisis.

A pesar que solamente dos futuros profesores hacen mención a que el experimento se puede modelar mediante una distribución binomial, no hacen un análisis de la situación problemática haciendo uso del valor esperado (Esperanza matemática) del número de caras que se esperaría obtener al lanzar una moneda cuarenta veces de una distribución Binomial de parámetros $n=40$ y $p=0,5$, con una esperanza $E(X)= 40 \times 0,5=20$, es decir, se esperaría encontrar 20 caras después de realizar repetidas veces el experimento. Asimismo, los futuros profesores no hacen mención a calcular un intervalo de confianza para una proporción poblacional que fluctuaría entre $[0,35; 0,65]$ con un 95% de confianza; contenidos que debería desarrollar como futuro profesor de Educación Secundaria. Lo que permitiría tomar una decisión en relación a quién (Juan o Pedro) realizó correctamente la actividad solicitada. En este caso, los resultados entregados por Juan, quien indica que, en los cuarenta lanzamientos, la

proporción de éxito $p=50\%$, valor contenido en el intervalo de confianza entregado, lo que nos lleva a inferir que con un nivel de confianza del 95%, Juan realizó correctamente la actividad, en cambio Pedro no.

5 Conclusiones

El presente estudio tenía como objetivo conocer la percepción de futuros profesores de matemática de Educación Secundaria sobre la probabilidad y evaluar sus conocimientos y argumentos que declaran sobre aleatoriedad. Esto, atendiendo a la incorporación de la estadística y probabilidad en el currículo escolar chileno desde los primeros años de enseñanza obligatoria, lo que ha planteado desafíos a los itinerarios formativos de los futuros profesores de matemática, contexto que genera tensiones entre los saberes adquiridos y lo demandado por el MINEDUC.

En este contexto, los resultados entregados por el instrumento de percepción hacia la enseñanza de la probabilidad de Estrada y Batanero (2015), permite concluir que, en general, los futuros profesores no se consideran competentes para resolver problemas asociados a probabilidad básica y no están interesados en enseñar probabilidad a sus futuros estudiantes, aunque esta temática está declarada en el currículo. Igualmente, para ellos, la probabilidad es solamente útil para los juegos de azar, lo que devela que las situaciones problemáticas abordadas durante su formación. Al respecto, Batanero (2005) indica que los juegos son los principales contextos en el que los estudiantes puedan comprender las diferencias de fenómenos determinísticos y no determinísticos. Pero, los estándares disciplinarios hacen hincapié a estudiar otras actividades que vayan más allá de las asociadas a juegos de azar (MINEDUC, 2012a).

En segundo lugar, y en relación con las respuestas y argumentos proporcionados por los futuros profesores acerca de las interrogantes planteadas sobre el concepto de aleatoriedad, en general, entrega evidencia que estos no entregan argumentos plausibles acerca del carácter no determinístico de los fenómenos propuestos, tendiendo a dar una justificación desde el punto de vista algorítmico, puntualmente desde el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.

En concreto, en la actividad 1 se aborda una situación que se modela mediante una distribución Poisson, pero esto no es percibido por los futuros profesores. Situación similar a lo ocurrido en la actividad 2, donde solamente dos de los participantes hacen referencia a que el fenómeno propuesto se puede modelar mediante una distribución binomial, pero sin hacer uso de ella para tomar una decisión para dar respuesta a la interrogante planteada. Esto evidencia que, en general, los estudiantes no han adquirido un razonamiento probabilístico.

Finalmente, los hallazgos del presente estudio entregan evidencia que, de ser contrastado con un grupo mayor, permitiría reorientar los programas de asignatura, considerando la importancia de una sólida mirada conceptual

en temáticas asociadas probabilidad particularmente el concepto de aleatoriedad y no solo mirar los contenidos de probabilidad desde una óptica procedimental. Asimismo, de manera implícita, el presente artículo antecedentes, que durante la formación de futuros profesores se deben introducir metodologías formativas que tiendan un puente entre el conocimiento de la enseñanza de la estadística y probabilidad con el conocimiento que deberán desplegar los profesores en formación de su enseñanza en el aula escolar.

Referencias

- Ayer, A.J. (1974). El Azar. En M. Kline, (Ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 172-181), Barcelona: Blume.
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 25, 41-58.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (3), 247-263.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 5, 15-28
- Behar, R y Yepes, M. (2007). *Estadística. Un enfoque descriptivo*. Cali: Universidad del Valle.
- Blanco, L. J. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza y aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(2), 107-132.
- Cabero-Almenara, J. y Costas, J. (2016). La utilización de simuladores para la formación de los alumnos. *Prisma Social*, 17, 343-372.
- Cornejo, J., Sanhueza, S. y Rioseco, M. (2012). *Orientaciones para la elaboración de tesis, seminarios y paper académicos*. Talca: Universidad Católica del Maule.
- Díaz-Levicoy, D. y Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica*, 13(1), 9-19.
- Estrada, A. y Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). Alicante: SEIEM.
- Even, R. y Ball, D. L. (2009). Setting the stage for the ICMI study on the professional education and development of teachers of mathematics. En R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 1-9). Boston: Springer.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2004). Research on statistical literacy, reasoning, and thinking: issues, challenges, and implications. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 397-409). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Girard, J. C. (1997). Modélisation, simulation et expérience aléatoire. En D. R. Green (Ed.), *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 73-76). Reims: Commission Inter-IREM.

- Green, D.R. (1989). Schools students's understanding of randomness. En R. Morris (Ed), *Studies in Mathematics education: The Teaching of Statistics* (pp. 27-39). París: Unesco.
- Hacking, I. (1990). *The taming of chance*. Cambridge: Cambridge University Press
- Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205
- Inzunza, S. (2015). Geogebra: una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. En J. Asenjo, O. Macías y J. C. Toscano (Eds.), *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 1-11). Buenos Aires: OEI.
- Mason, R. y Rennie, F. (2006). *E-Learning. The key concepts*. Londres: Routledge.
- McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. Madrid: Pearson Addison.
- MINEDUC (2012a). *Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica. Estándares pedagógicos y disciplinarios*. Santiago: LOM Ediciones.
- MINEDUC (2012b). *Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Media. Estándares pedagógicos y disciplinarios*. Santiago: LOM Ediciones.
- MINEDUC (2016). *Crea el sistema de desarrollo profesional docente y modifica otras normas*. Valparaíso: Congreso Nacional.
- Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D. y Vásquez, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios Pedagógicos*, 44(1), 135-156.
- Sadovsky, P. (2014). Pensar en relacionar ideas y producir nuevas ideas. *El Monitor*, 35, 20- 24.
- Serrano, L., Ortiz, J.J. y Rodríguez J. (2009). La simulación como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 157 -179). Melilla: Universidad de Granada.
- Solbes, J. y Torres, N. (2012). Análisis de las competencias de pensamiento crítico desde el abordaje de las cuestiones sociocientíficas: un estudio en el ámbito universitario. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 26, 247-269.
- Vezub, L. F. (2016). Los saberes docentes en la formación inicial. La perspectiva de los formadores. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 53(1), 1-14.
- Villardón-Gallego, L., Yániz, C., Achurra, C., Iraurgi, I. y Aguilar, M. C. (2013). La competencia para aprender en la universidad: desarrollo y validación de un instrumento de medida. *Revista Psicodidáctica*, 18(2), 357-374.