UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DAS LEIS DOS SENOS E DOS COSSENOS POR MEIO DO SOFTWARE RÉGUA E COMPASSO

Simone Aparecida Xavier
Redes Municipal e Estadual de Ensino do Rio de Janeiro
Thaís Tenório [1]
Universidade Federal Fluminense
André Tenório[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro

RESUMO

O artigo apresenta uma abordagem de ensino para as leis dos senos e dos cossenos por meio da utilização do software educativo Régua e Compasso (C.a.R.). Duas turmas da 1ª série do ensino médio de uma escola estadual do Rio de Janeiro foram comparadas. Em uma ministrou-se aulas tradicionais, na outra, aulas enriquecidas com C.a.R. Os dados estatísticos levantados não foram suficientes para concluir qual foi o melhor método de ensino. No entanto, de acordo com a participação e o desenvolvimento dos alunos nas aulas, o método enriquecido se sobressai perante o tradicional. A aula com a metodologia tradicional com atividades mecânicas acaba, muitas vezes, por desmotivar o aluno. Softwares educativos matemáticos são bons recursos para o ensino e a aprendizagem de trigonometria, pois despertam o interesse, a participação e a curiosidade, além de facilitar o entendimento dos conteúdos.

Palavras-chave: Ensino tradicional. Informatização. Leis dos senos e dos cossenos. Régua e Compasso.

ABSTRACT

[1] tenoriocalc@gmail.com
[2] tenorioifrj@gmail.com

This paper presents a proposal for teaching the laws of sines and cosines with the Compass and Ruler (C.a.R.) software. Two classes of a state school in Rio de Janeiro at middle-school level were compared. Traditional methods were used in one class and teaching enriched with C.a.R in another. Statistical data from grades were insufficient to conclude which was the better teaching method. In terms of student participation and development, however, it is evident that computer use helps with learning. All too often traditional methods using mechanical activities discourage the student. Mathematical programs are good resources for teaching and learning trigonometry. They stimulate interest, participation, curiosity and content understanding.

Keywords: Traditional teaching. Computer use. Laws of sines and cosines. Compass and Ruler.

INTRODUÇÃO

Atualmente, o acesso às novas tecnologias e à informação é difundido. O computador, em especial, tem se mostrado o veículo de informação e comunicação mais eficaz de toda a era digital por atualizar informações em uma velocidade impressionante. Uma forma de aproximar o ambiente escolar do cotidiano do aluno é empregar a tecnologia como recurso para o ensino e a aprendizagem.

Com a evolução da sociedade e a informatização, os professores necessitam de preparação para interagir com uma geração de alunos mais atualizada e conectada a ambientes virtuais. Portanto, o computador deve ser visto como uma ferramenta de auxílio para a construção do conhecimento por proporcionar um ambiente virtual para o ensino de matemática.

Autores como Boeri e Silva (2011), Costa, Tenório e Tenório (2014), Dosciati *et al.* (2013), Fernandes (2010), Pacheco (2014), Silva e Moita (2010), Tavares (2014) e Tenório, Leite e Tenório (2014) vêm buscando formas de facilitar a aprendizagem por meio da utilização de novas tecnologias. Por exemplo, Fernandes (2010) pesquisou o potencial de vários softwares livres de geometria na aprendizagem do conteúdo de círculos trigonométricos. Mas propostas de abordagem para ensinar trigonometria com o uso de softwares ainda são escassas.

As leis dos senos e dos cossenos permitem examinar um triângulo qualquer e proporcionam facilidade de descoberta das medidas essenciais de um triângulo. Entretanto, os alunos, além de apresentarem grande dificuldade em aplicar as leis, também não conseguem determinar como ou onde aplicá-las.

Este estudo apresenta uma proposta de utilização do Régua e Compasso (C.a.R.) no conteúdo das leis dos senos e dos cossenos para alunos de 1ª série do ensino médio. O C.a.R. é um software educativo matemático de fácil manuseio, gratuito e com versão em português.

Para a pesquisa foi elaborada uma abordagem enriquecida pelo software com o intuito de mitigar o déficit de aprendizado dos alunos no ensino da matemática, promover a utilização de novas tecnologias e auxiliar o desenvolvimento de habilidades e competências previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) das ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (BRASIL, 2002).

A proposta foi testada em escolas públicas da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro a fim de verificar se o ensino enriquecido com novas tecnologias, se comparado ao método tradicional, auxiliaria no processo de ensino-aprendizagem.

REFERENCIAIS TEÓRICOS

O uso de softwares educativos na educação matemática

Nas últimas décadas, na maioria das escolas, o aluno ainda é tratado como mero espectador, receptor do conteúdo ensinado em matemática.

> ...a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentada pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão do conhecimento. Mas ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 15)

Todavia, essa metodologia de ensino que prioriza lembrar fórmulas e conceitos, resolver exercícios e memorizar estratégias para desenvolver problemas precisa ser modificada de modo a promover a construção do conhecimento.

A aprendizagem mecânica é questionada há anos por diversos educadores como Estevez (2010), Hoffman (2000) e Piaget (1974). Diante desse dilema, o uso de novas tecnologias pode ser uma alternativa.

Segundo Batista *et al.* (2005), Bauerlein (2012), Graven (2011), Pacheco (2014) e Tavares (2014), o ensino com a utilização de novas tecnologias contribui para a aprendizagem do aluno se estimular a participação ativa e o desenvolvimento de uma postura crítica frente ao conhecimento.

> O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino, mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o

> desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as (BRASIL, 1997, p. 35).

A aprendizagem é considerada um processo construtivo, dependente das ações do sujeito e de suas reflexões sobre tais ações (PIAGET, 1974). Como afirma Gravina (1996, p.7): “Todo conhecimento é ligado à ação e conhecer um objeto ou evento é assimilá-lo a um esquema de ação... Isto é verdade do mais elementar nível sensório motor ao mais elevado nível de operações lógico-matemáticas.”.

Softwares de geometria dinâmica auxiliam o aluno a aprender matemática por permitirem a visualização e a rápida construção de objetos (BITTENCOURT, 1998; GRAVINA, 1996; HOFFMAN, 2000; PACHECO, 2014).

> Softwares de geometria dinâmica são ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de “desenhos em movimento”, e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (GRAVINA, 1996, p. 3).

Com o C.a.R. o aluno manipula instrumentos de desenho virtuais em suas construções geométricas, o que auxilia no desenvolvimento matemático e promove aulas mais dinâmicas com o suporte do desenho geométrico.

> ... a falta da geometria repercute seriamente em todo o estudo das ciências exatas, da arte e da tecnologia. Mas o desenho geométrico foi afetado na sua própria razão de ser, já que em si é uma forma gráfica de estudo de geometria e de suas aplicações. Muito antes de desaparecer, como matéria obrigatória no ensino do 1º grau, o desenho geométrico já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, onde muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho, pois geralmente estes se reduziam à régua e compass. (ZUIN, 2002, p. 3)

Para Bittencourt (1998), o software de geometria dinâmica deve ser considerado um caderno de rascunho especial onde erros podem ser corrigidos facilmente e as propostas de soluções testadas rapidamente.

> Enquanto que, no papel, da mesma forma que com a palavra escrita, o conhecimento adquire um caráter, enquanto significação, fixo, absoluto, univalente, a geometria do nosso exemplo, via computador, adquire, relativamente à geometria usual, um caráter transitório, maleável, não permanente. (BITTENCOURT, 1998, p. 3)

Hoffman (2000) e Pacheco (2014) destacaram que a interação do educando com o software proporciona o desenvolvimento de habilidades promotoras do raciocínio matemático e auxilia a superar obstáculos de aprendizagem em geometria porque os conceitos e os desenhos são construídos em harmonia, o que ajuda o aluno a representar situações-problema.

No contexto da trigonometria, quando um aprendiz se encontra num estágio avançado de pensamento formal também “age” sobre seus objetos de investigação. Consegue identificar regularidades que se generalizam, testa conjecturas em casos particulares e, finalmente, aventura-se na tentativa de demonstração.

A trigonometria na educação básica brasileira

Etimologicamente a palavra trigonometria significa medida de triângulos. Tem origem grega onde tri é três, gono é ângulo e metrien é medida. Ela trata do estudo das funções trigonométricas e das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

A trigonometria teve início nas civilizações babilônicas e egípcias. Na antiguidade era eminentemente prática e tinha a finalidade de determinar distâncias incapazes de serem medidas diretamente como problemas de latitude e longitude de cidades em mapas. Serviu à navegação, à agrimensura e à astronomia (ROCHA, 2009).

Seu estudo se subdivide em duas partes: trigonometria plana (investiga os triângulos planos) e trigonometria esférica (estuda os triângulos sobre as superfícies esféricas). O ensino médio brasileiro se restringe ao conteúdo da trigonometria plana (ROCHA, 2009).

Contudo, pesquisas como a de Guerato (2008) mostraram que a trigonometria passou a ser deixada em segundo plano no ensino da matemática. Durante anos, a trigonometria e a geometria não foram ministradas em sala de aula (PAVANELLO, 1993). O professor podia seguir a proposta de cumprir apenas 75% dos conteúdos sugeridos para a série, então, conceitos geométricos e trigonométricos eram deixados de lado. Inclusive, constavam apenas ao final de livros textos (GUERATO, 2008). Criou-se uma geração sem conhecimentos na área.

A partir da mudança curricular, os parâmetros curriculares nacionais (PCN) (BRASIL, 1997) impuseram a discussão desses conteúdos em sala de aula. Entretanto, grandes dificuldades surgiram no ensino e na aprendizagem (GUERATO, 2008). A partir de então os professores buscam tornar a aprendizagem mais dinâmica e interessante.

Muitas vezes, exercícios, trabalhos ou provas mostram que os alunos não compreenderam os significados ou mesmo a linguagem simbólica dos conteúdos discutidos em trigonometria. Além disso, dificilmente eles sentem-se preparados para resolver situações-problema (PEDROSO, 2012).

A trigonometria na educação básica é discutida no ensino médio a partir da introdução de diversos conceitos, entre os quais se destaca: seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, arcos, ângulos, unidades de medida de ângulos, círculo trigonométrico, resolução de equações trigonométricas, funções trigonométricas e representação gráfica de funções (RIO DE JANEIRO, 2012). A resolução de problemas também recebe atenção.

Seus conceitos são ainda abordados durante o estudo de geometria analítica e números complexos. Além de ser necessária à disciplina de física no estudo de fenômenos periódicos como a vibração do som e o fluxo de corrente alternada. Seu estudo não deve ser deixado de lado e não se limita ao estudo de triângulos, se estende a outros campos da matemática, mecânica, engenharia, música, entre outros (PEDROSO, 2012).

Os PCNEM (BRASIL, 2000) destacam a importância de ensinar trigonometria e utilizar recursos pedagógicos que aprimorem o aprendizado matemático e de outras disciplinas.

> Apesar de sua importância, tradicionalmente a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens propuseram e continuam propondo. (BRASIL, 2000, p. 121)

O excerto acima alude à necessidade dos alunos estudarem conceitos trigonométricos para desenvolverem habilidades e competências voltadas à resolução de problemas. Cálculos aritméticos e algébricos são importantes, mas não podem suprimir o ensino de trigonometria.

METODOLOGIA

O artigo apresenta uma proposta de ensino de trigonometria pelo uso do software educativo de geometria dinâmica C.a.R.. Para tanto, a possibilidade de trabalhar as leis dos senos e dos cossenos por meio do software foi desenvolvida e aplicada com alunos da 1ª série do ensino médio. A amostra totalizou 44 indivíduos. Alunos da rede pública estadual do município do Rio de Janeiro com idades em torno de 17 anos.

Na escola não havia laboratório de informática ou equipamentos em condição de uso, o que inviabilizou uma abordagem construtivista ou pós-construtivista com a manipulação uniforme do recurso computacional pelos alunos. Como alternativa desenvolveu-se uma abordagem enriquecida. Um notebook e um datashow foram utilizados. As aulas priorizaram o ensino de trigonometria por meio da representação computacional e da visualização.

Na abordagem enriquecida com o emprego do C.a.R., os alunos participaram da aula e observaram as construções desenvolvidas de modo a proporcionar uma aprendizagem mais significativa através das novas tecnologias. O professor apresentou como manusear os comandos básicos do C.a.R. (Figura 1).

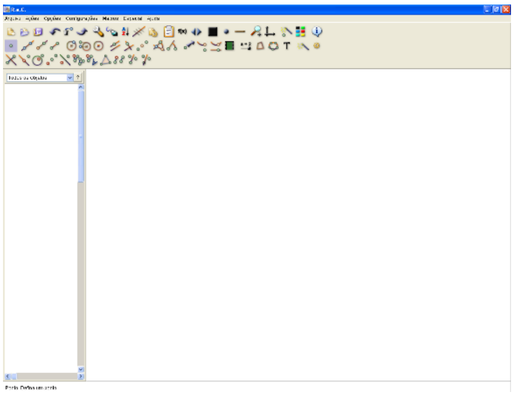

Figura 1. Janela inicial do C.a.R..

Os alunos foram estimulados a discutirem a utilidade dos comandos: ponto, reta, semirreta, segmento, círculo, compasso, círculo com raio fixo, retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio e ângulo (Figura 2).

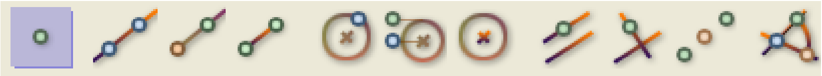

Figura 2. Alguns comandos da janela inicial do C.a.R..

Alguns elementos geométricos e figuras foram construídos: três pontos alinhados, três pontos equidistantes, circunferência com centro no vértice de um ângulo reto, triângulos retângulo, isósceles e equilátero e triângulo com ângulos e lados arbitrários. Em cada construção, um aluno manipulou o software no notebook. Os demais permaneceram em seus lugares, mas colaboraram com sugestões para construir as figuras.

Com o intuito de ilustrar o funcionamento do C.a.R., as construções feitas em sala de aula e a utilização do software na descrição das leis dos senos e dos cossenos, quatro exemplos são mostrados a seguir.

1. Circunferência de centro no vértice de um ângulo reto.

a) Usar a ferramenta para construir uma reta.

b) Desenhar uma reta perpendicular com a ferramenta .

c) Empregar a ferramenta para construir um ângulo reto.

d) Clicar no ícone para desenhar a circunferência. Selecionar o vértice do ângulo reto como centro e mais um ponto arbitrário qualquer (Figura 3).

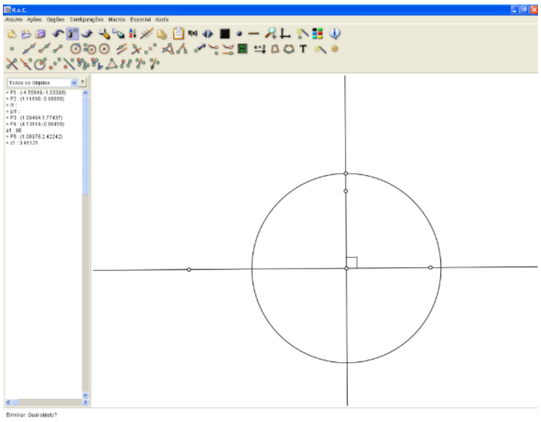

Figura 3. Ângulo reto e circunferência.

2. Triângulo com ângulos e lados arbitrários.

a) Construir um triângulo por meio da ferramenta .

b) Nomear os três vértices como A, B e C por meio de um clique com o botão direito sobre de cada ponto desejado.

c) Selecionar as medidas dos lados na janela “Editar Reta, Semirreta, Segmento” (Figura 4), aberta por meio de um clique com o botão direito sobre o lado desejado.

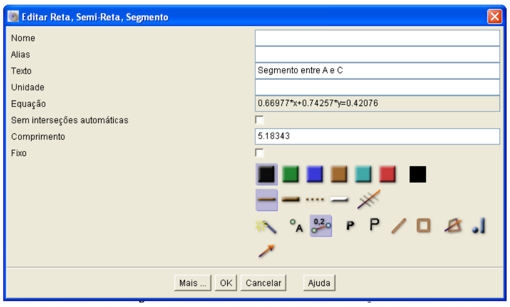

Figura 4. Janela de edição.

d) Indicar os ângulos internos pela ferramenta . Clicar sobre o ângulo para editá-lo e expressar sua medida.

e) Se for necessário ocultar construções secundárias, usar a ferramenta .

A construção de um triângulo qualquer pode ser observada na Figura 5. Os triângulos das questões do reforço pedagógico (Figura 16) foram construídos com esses passos.

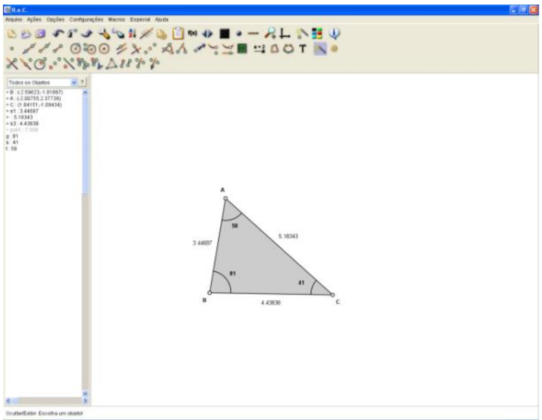

Figura 5. Triângulo qualquer.

3. Lei dos senos

a) Desenhar um triângulo arbitrário.

b) Usar a ferramenta expressão aritmética para abrir a janela de edição de expressões. O objetivo é conhecer os valores de seno dos ângulos internos, de modo semelhante ao exibido na Figura 6. Repetir esse passo para todos os vértices. Isso mostrará as medidas dos lados e de cada ângulo ao mover qualquer vértice.

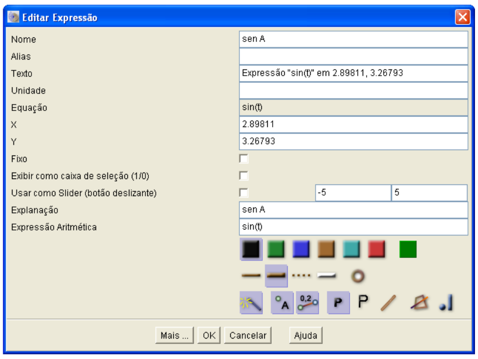

Figura 6. Janela de edição de expressões.

c) Calcular a razão entre o seno de um ângulo e seu lado oposto por meio da ferramenta . Repetir o processo para cada ângulo interno. Ao mover um dos pontos do vértice, os valores a/sen A, b/sen B e c/sen C continuam idênticos; verifica-se parcialmente a lei dos senos.

Para completar a constatação da lei dos senos:

d) Construir uma circunferência ao redor do triângulo ABC. Para isso, gerar as mediatrizes de dois segmentos do triângulo, de modo a determinar qual ponto será o centro da circunferência.

d1) Determinar os respectivos pontos médios de dois lados do triângulo pela ferramenta .

d2) Desenhar, com a ferramenta , a mediatriz de cada um dos dois lados.

d3) Selecionar como centro da circunferência o ponto de interseção das retas mediatrizes. A medida do raio deve corresponder à distância do centro até um dos vértices do triângulo.

e) Usar a ferramenta para construir um segmento de reta do centro à circunferência (raio) e exibir sua medida pela janela de edição. Calcular o valor de 2*r* com a ferramenta .

f) Ao mover qualquer vértice, é possível acompanhar a proporção entre os senos dos ângulos e os lados opostos do triângulo circunscrito e o valor do diâmetro. A construção (Figura 7) auxilia a discussão da lei dos senos.

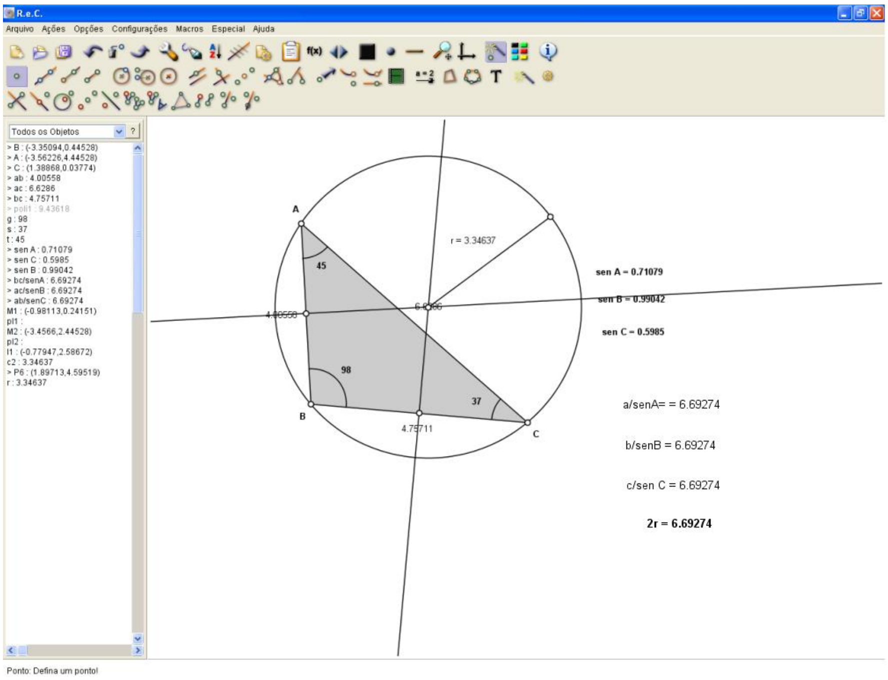

Figura 7. O emprego do C.a.R. na descrição da lei dos senos.

4. Lei dos cossenos

a) Desenhar um triângulo arbitrário. Nomear vértices, lados e ângulos internos. Exibir as medidas dos lados e ângulos.

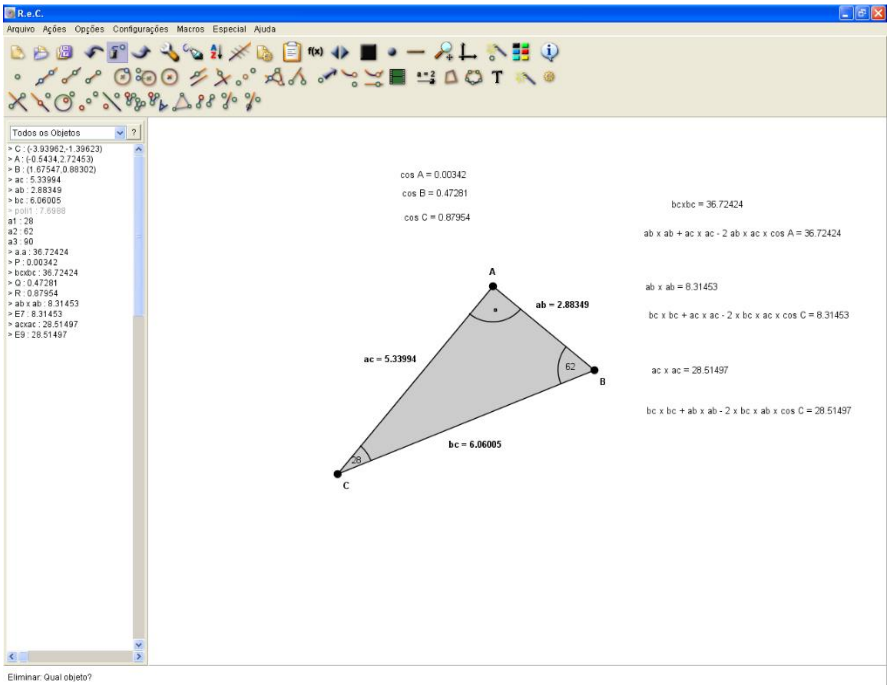

Figura 8. O emprego do C.a.R. na descrição da lei dos cossenos.

b) Usar a ferramenta para determinar os comprimentos dos três lados e a partir deles calcular:

- o cosseno de cada ângulo;

- o quadrado de cada lado;

- a soma dos quadrados de dois lados menos duas vezes o produto desses lados pelo produto do cosseno do ângulo adjacente a ambos.

c) Repetir a verificação da lei dos cossenos para os dois outros ângulos internos do triângulo (Figura 8).

O conteúdo de leis dos senos e dos cossenos foi discutido em duas turmas distintas pela abordagem tradicional. Posteriormente, aplicou-se uma primeira verificação de aprendizagem. A seguir, houve um reforço pedagógico com diferentes abordagens para cada turma: tradicional em uma (20 alunos) e enriquecida com o uso do C.a.R. em outra (24 alunos). Na turma controle, o docente empregou a abordagem tradicional. Na chamada alvo, a abordagem enriquecida com o C.a.R.. Os alunos realizaram, então, uma segunda verificação de aprendizagem. A aplicação prática da pesquisa consistiu nas seguintes etapas:

1º) Aula expositiva e discussão argumentativa das leis dos senos e dos cossenos (igual para às duas classes);

2º) Primeira verificação de aprendizagem (idêntica para às duas classes);

3º) Reforço pedagógico do conteúdo (diferente para cada classe: tradicional em uma e enriquecida pelo uso do software C.a.R. na outra);

4º) Segunda verificação de aprendizagem (idêntica para às duas classes e com nível de dificuldade semelhante à avaliação anterior);

As classes fizeram duas verificações de aprendizagem de nível semelhante. A primeira objetivou gerar mais informações sobre os conhecimentos dos alunos, de modo que comparações pudessem ser realizadas independentemente do desempenho geral da classe.

Cada avaliação foi desenvolvida em 50 minutos e contava com 5 questões discursivas. Os alunos receberam notas de 0 a 10, sendo 0 a nota mínima e 10 a nota máxima. As avaliações de aprendizagem forneceram os dados para a análise estatística (teste *T*).

A análise comparativa quanti-qualitativa foi empregada na discussão dos resultados. Ao colocar a pesquisa em prática na escola, o comportamento dos alunos em relação à matemática e quais foram suas reações diante de intervenções com o uso do software foram observadas e registradas. Além disso, a média e o desvio padrão das classes em cada uma das questões das avaliações foram comparadas a fim de obter mais dados quantitativos sobre as abordagens de ensino.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Percepções do docente

No início da aplicação da pesquisa foi necessário rever alguns pré-requisitos. Foi ministrada uma aula expositiva dos seguintes conteúdos: classificação dos triângulos quanto aos ângulos e aos lados, ângulos complementares e suplementares, razões trigonométricas no triângulo retângulo, seno/cosseno de ângulos notáveis e seno/cosseno de ângulos complementares e suplementares. Apesar das dificuldades de entendimento, os alunos se mostraram atentos.

As leis dos senos e dos cossenos foram apresentadas e demonstradas para as duas turmas conforme plano de aula tradicional. Questões de fixação foram resolvidas em dupla. Durante a aula expositiva, alguns alunos comentaram que "o conteúdo não era fácil" e relataram possuir também grande dificuldade em geometria.

Todavia, os alunos acharam interessantes as questões de triângulo retângulo e de leis dos senos e dos cossenos por trazerem conexões com situações cotidianas. Muitos relataram não entenderem o porquê de estudar conteúdos matemáticos e, assim, acabavam sem reconhecer o sentido deles.

A contextualização de questões do tipo situação-problema promoveu, na concepção do aluno, a apresentação da aplicabilidade cotidiana do conteúdo, como previsto pelo PCNEM+ (BRASIL, 2002). Para Pedroso (2012), contextualizar o estudo de matemática também traria benefícios ao processo de ensino-aprendizagem.

A resolução das questões em aula mostrou a dificuldade do aluno em reconhecer qual fórmula aplicar em um primeiro momento. Mas, ao observar atentamente os dados fornecidos e avaliar as leis, eles identificavam a adequada sem intervenção do professor. Os alunos selecionarem corretamente a fórmula a ser usada em cada situação-problema mostrou a compreensão da linguagem simbólica desse conteúdo trigonométrico, o que nem sempre ocorre (PEDROSO, 2012). Após a discussão do conteúdo e a resolução das questões, aplicou-se a verificação de aprendizagem.

Na primeira avaliação da turma controle (recebedora da abordagem tradicional), seis alunos entregaram-na em branco e dois, apesar de tentarem resolver alguma questão, tiraram zero. Na turma alvo (recebedora da abordagem enriquecida com o software), oito também não acertaram qualquer questão, mas cinco nem sequer tentaram.

Na questão 1 (Figura 9), cinco alunos da turma controle e um da alvo erraram o sinal do cosseno de 120°. Na questão 2 (Figura 10), na turma controle, quatro erraram o sinal do cosseno de 120° e um errou a potenciação (ao multiplicar 70 por 2 e 80 por 2 em vez de efetuar a potenciação). Na turma alvo, somente dois erraram o sinal do cosseno.

1. (RIGONATTO, 2013) Determine o valor de y no triângulo obtusângulo abaixo.

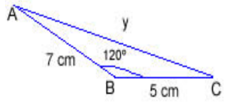

Figura 9. Questão 1 da primeira avaliação de aprendizagem.

2. (RIBEIRO, 2010) Certa estrada está sendo construída e, em determinado trecho, será construído um túnel em linha reta que atravessa uma montanha. Para isso, um engenheiro, utilizando instrumentos, marcou os pontos A e B, que serão as extremidades do túnel e o ponto C. Depois mediu os comprimentos de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e o ângulo, como mostra o esquema. Determine a medida do comprimento do túnel.

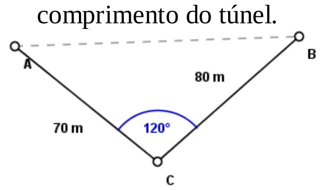

Figura 10. Questão 2 da primeira avaliação de aprendizagem.

3. (NOÉ, 2013) Calcule a medida da maior diagonal do paralelogramo da figura:

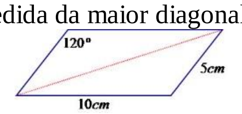

Figura 11. Questão 3 da primeira avaliação de aprendizagem.

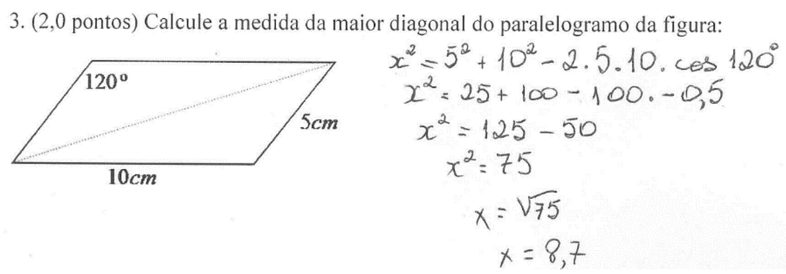

Figura 12. Resolução da questão 3 da primeira avaliação por uma aluna.

Apenas um aluno da turma controle e cinco da alvo conseguiram solucionar a questão 3 (Figura 11). O erro mais comum foi na operação com números não inteiros negativos (Figura 12).

Três alunos da turma controle acertaram a questão 4 (Figura 13). Três erraram ao realizar o cálculo da propriedade fundamental de proporção. Seis usaram os ângulos 57° e 59° sem perceberem que deveriam encontrar o valor do ângulo faltante pela soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer e aplicar a lei dos senos. Na turma alvo, dois acertaram e cinco fizeram a mesma consideração equivocada com os ângulos.

4. (UFPE) Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos A e B, como ilustra a figura abaixo. Para calcular o comprimento $\overline{AB}$, escolhe-se um ponto C, na mesma margem em que B está, e medem-se os ângulos $\widehat{CBA}$ = 57° e $\widehat{ACB}$ = 59°. Sabendo que BC mede 30m, indique, em metros, a distância $\overline{AB}$.

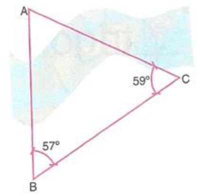

Figura 13. Questão 4 da primeira avaliação de aprendizagem.

A turma controle teve seu melhor desempenho na última questão (Figura 14). Cinco alunos a acertaram, dois erraram a divisão final de um número natural por um número decimal e um inverteu os ângulos durante a aplicação da fórmula (Figura 15).

5. (SILVA, 2013) Determine o valor de x no triângulo abaixo:

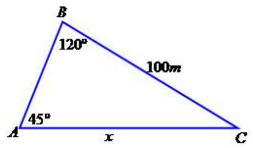

Figura 14. Questão 5 da primeira avaliação de aprendizagem.

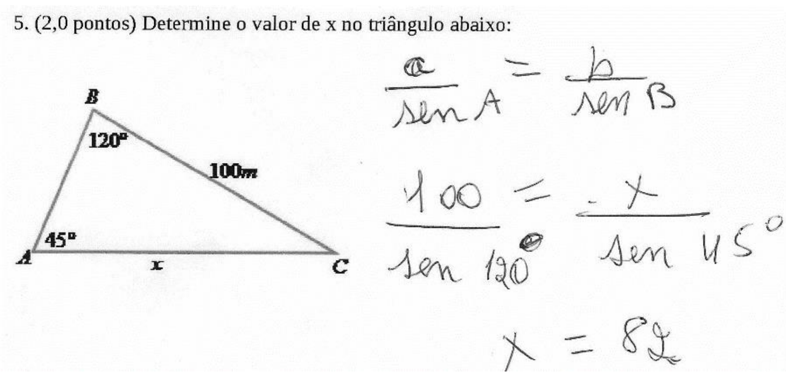

Figura 15. Resolução da questão 5 da primeira avaliação por um aluno.

Na turma alvo, cinco alunos resolveram corretamente e um se enganou ao colocar 45º em vez do valor do seno de 45º.

A tabela 1 traz a média e o desvio padrão das notas de cada turma por questão da primeira avaliação. A quinta questão teve o maior índice de acertos na turma controle e a primeira, na turma alvo. A turma controle teve seu pior desempenho na terceira questão e a alvo, na quarta.

Muitos alunos tiveram dificuldades em realizar operações com números não inteiros negativos, conteúdo de aritmética previsto para o 7° ano conforme o currículo mínimo (RIO DE JANEIRO, 2012). Outros autores também reportaram falhas semelhantes (CHIRÉIA, 2013; ROMANATTO, 2012; PENNA, 2014; TAVARES, 2014). Chiréia (2013) destacou as dificuldades de alunos da 3ª série do ensino médio em cálculos aritméticos e algébricos durante a resolução de problemas. Penna (2014) e Romanatto (2012) citaram erros em operações com números não inteiros. Tavares (2014) evidenciou dificuldades em operações matemáticas básicas com números negativos.

Tabela 1. Média e desvio padrão por questão da primeira avaliação das turmas controle e alvo.

Turma controle					
Primeira avaliação	1ª questão	2ª questão	3ª questão	4ª questão	5ª questão
Média	0,53	0,39	**0,13**	0,34	**0,61**
Desvio padrão	0,00	0,61	0,23	0,69	0,88
Turma alvo					
Primeira avaliação	1ª questão	2ª questão	3ª questão	4ª questão	5ª questão
Média	**1,13**	0,90	0,81	**0,17**	0,44
Desvio padrão	0,88	0,86	0,88	0,56	0,83

Outro erro frequente dos alunos foi não recordar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, conteúdo de geometria do 8° ano (RIO DE JANEIRO, 2012). Alguns foram inclusive capazes de discernir e manifestar que parte da dificuldade com trigonometria advinha de deficiências no aprendizado de conteúdos prévios de geometria. Casos semelhantes foram aludidos por autores como Guerato (2008), Pavanello (1993) e Zuin (2002). Além disso, não bastava conhecer o teorema, era preciso reconhecer a necessidade de empregá-lo. Pacheco (2014), ao abordar triângulos em uma perspectiva construtivista com vinte alunos de 8° ano do ensino fundamental, relatou a dificuldade de identificarem a premência de recorrer ao teorema para a resolução de questões.

Os principais erros foram discutidos após a verificação da aprendizagem. Depois, o professor recordou as leis dos senos e dos cossenos e iniciou o reforço pedagógico. Abordagens distintas foram usadas em cada turma, embora ambas tenham resolvido as mesmas questões. A turma controle seguiu uma abordagem tradicional. Já a alvo contou com o auxílio do software C.a.R..

Os alunos da turma controle estavam interessados e participativos, mas não realizaram comentários relevantes sobre o conteúdo. Eles discutiram possíveis estratégias de resolução, mas se limitaram à aplicação direta das fórmulas. Alguns comparam as questões já realizadas às do reforço e comentaram suas falhas na primeira avaliação. Os principais erros foram confundir a aplicabilidade da lei dos senos, empregada no lugar da lei dos cossenos, e usar valores errados de seno e cosseno.

Uma aluna ressaltou a semelhança entre o reforço do conteúdo e suas aulas no ensino fundamental quando a turma tinha um desempenho ruim. Nelas, o professor entregava as notas e ensinava novamente o conteúdo de outra maneira ou não, na tentativa de ajudar os alunos a compreenderem o que foi avaliado.

Na turma alvo, o professor mostrou o manuseio do C.a.R.. Houve então a construção de alguns elementos e figuras geométricas como descrito na metodologia. Apenas alguns alunos tiveram a oportunidade de manipular o C.a.R., mas todos colaboraram nas construções. Nas questões de leis dos senos e dos cossenos (Figura 16), o software foi utilizado no cálculo das expressões.

Em cada questão, as figuras foram montadas passo a passo com o C.a.R. segundo o enunciado. O software ajudou a determinar lados e ângulos desconhecidos e a descrever as leis dos senos e dos cossenos. Os alunos observavam a resolução da questão pelo C.a.R. e então resolviam-na de forma usual com a lei dos senos ou a dos cossenos.

Muitos ficaram entusiasmados por conseguirem encontrar os resultados pelo software e ansiosos para verificá-los no papel. A facilidade de acertar questões ao usar o C.a.R. merece destaque. Uma aluna mencionou ser impossível errar se todos os passos fossem seguidos adequadamente. O C.a.R. ajudou a motivar e desenvolver autoconfiança. Inclusive as questões foram respondidas com mais rapidez após a resolução com o software. Alguns, por vontade própria, resolveram as questões concomitantemente ao C.a.R. por quererem verificar se conseguiriam acertá-las sem conhecer o resultado final.

Para os alunos, poder ver pelo software o desenvolvimento de questões matemáticas proporcionou um "abandono" do abstrato e possibilitou a simulação dos resultados por meio da manipulação e da mudança de pontos ou segmentos. Tais percepções convergem com a de estudiosos como Gravina (1996), Hoffmann (2000) e Pedroso (2012).

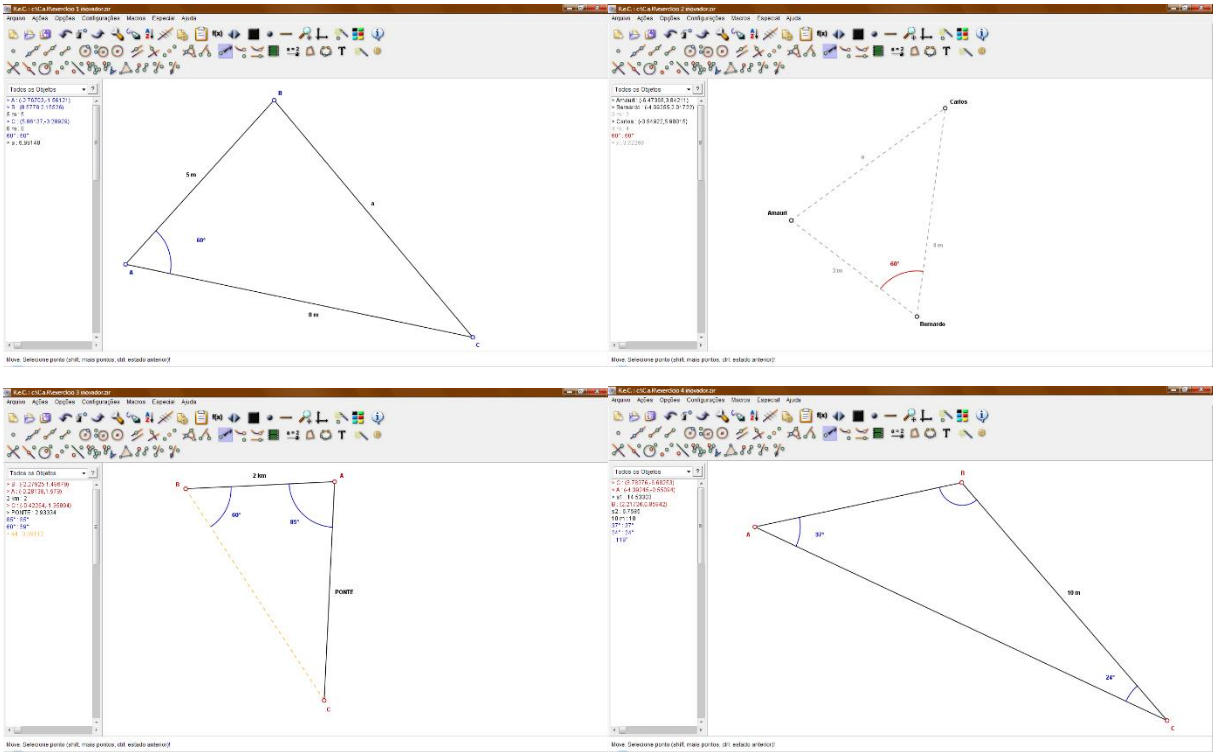

Figura 16. Alguns dos triângulos construídos nas aulas com o C.a.R..

A maioria dos alunos destacou ainda a facilidade de entendimento devido a visualização e dinamismo promovidos pelo software, benefícios também salientados por Bittencourt (1998), Fernandes (2010), Hoffman (2000) e Pacheco (2014). Um aluno comentou não poder imaginar que a resolução de um problema de trigonometria seria tão simples ao usar um software educativo e mencionou que todas as aulas deveriam empregar o recurso. "Aprender visualizando é mais fácil do que ficar imaginando", afirmou.

A facilidade na construção de figuras, apontada por Bittencourt (1998) e Gravina (1996), também foi destacada. Os alunos relataram dificuldades em iniciar desenhos geométricos por não recordarem alguns conceitos, nem manipularem com segurança a régua, o transferidor e o compasso. A partir do emprego do computador e do C.a.R. nas atividades seria possível pesquisar na internet os conceitos esquecidos e construir as figuras a partir das ferramentas oferecidas pelo software, o que tornaria desenhar mais simples. Então, traçar elementos geométricos não dependeria tanto da habilidade individual em desenho.

Um aluno comentou ainda que não precisaria levar instrumentos de desenho tão frequentemente se tivesse usado o C.a.R. em todas as aulas, porque o programa fornece ferramentas capazes de substituir lápis, lápis de cor, régua, compasso, transferidor. Ele afirmou: “Isso seria ótimo! [...] Nem parecia que eu estaria indo para a escola...”. Além de acharem o software útil para a aprendizagem, os alunos também o viram como um recurso capaz de tornar a escola um local mais atrativo.

Graven (2011) prognosticou as vantagens de inclusão de computadores no processo de ensino-aprendizagem. A turma alvo mostrou maior interesse pelas aulas que a controle. Os alunos transpareceram curiosidade em aprender com o uso de computador. Antes, eles viam tal recurso apenas como meio para acessar a internet, bater papo, participar de redes sociais, assistir vídeos e jogar. Ficaram admirados em conhecer um programa computacional capaz de ajudá-los a estudar um conteúdo matemático. Classificaram a aula como excelente, porque o conteúdo foi discutido de modo interativo a partir do emprego de novas tecnologias. Segundo os alunos, todas as aulas de geometria e de trigonometria deviam contar com o auxílio de softwares educativos.

Para o docente, o interesse e a participação na aprendizagem foram potencializados com o uso do recurso tecnológico, como notado por Pacheco (2014), Penna (2014) e Tavares (2014). Um aluno até solicitou ajuda para instalar o programa em seu notebook em alguma aula posterior.

O software educativo ajudou a construir os conceitos matemáticos, apesar das aulas não terem tido somente uma abordagem construtivista, mas enriquecida. Mesmo assim, foi possível mostrar aos alunos o desenvolvimento geométrico e trigonométrico pelo C.a.R..

Frente à abordagem tradicional, o software ajudou os alunos a valorizar o desenho geométrico e a sentir afinidade pela matemática. Ele possibilitou experimentar construções, visualizar figuras e verificar a validade dos teoremas em diferentes triângulos por meio de um recurso tecnológico conhecido, o computador. Outro aspecto positivo foi permitir a construção rápida de triângulos, sem a necessidade de habilidade de desenho, tanto do professor quanto dos alunos. Óbices ao ensino-aprendizagem de geometria provocados por inaptidão de desenho foram abordados por Zuin (2002). Usar o software como um caderno de rascunho, em que erros podem ser corrigidos sem desenhar novamente toda a figura e diferentes resoluções podem ser testadas, é uma vantagem também apontada por Bittencourt (1998) e Gravina (1996).

Uma segunda verificação de aprendizagem foi aplicada quando o reforço do conteúdo terminou. Houve muitas notas zero, sete na turma controle e doze na alvo.

1. Calcule a medida x no triângulo abaixo:

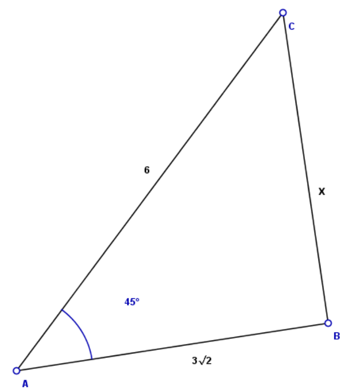

Figura 17. Questão 1 da segunda avaliação de aprendizagem.

Na primeira questão da segunda avaliação (Figura 17), na turma controle, quatro alunos acertaram integralmente, quatro erraram cálculos algébricos, um errou em operações com números negativos e um colocou 45, não cosseno de 45º. Na turma alvo, seis a acertaram, três erraram cálculos algébricos, um não soube extrair a raiz quadrada (e acabou por dividir o resultado por dois) e um utilizou a fórmula correta, mas esqueceu de colocar o fator b ao substituir os valores (Figura 18).

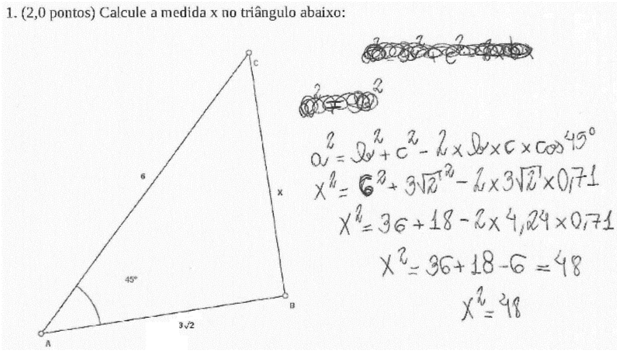

Figura 18. Resolução da questão 1 da segunda avaliação por uma aluna.

Apenas um aluno da turma controle acertou a segunda questão (Figura 19). Cinco não souberam calcular a raiz quadrada, quatro erraram cálculos aritméticos básicos e um utilizou o cosseno com valor negativo. Na turma alvo, quatro conseguiram solucioná-la. Três utilizaram a fórmula erradamente, dois não calcularam o valor de x ao quadrado, um errou cálculos aritméticos básicos e um substituiu os valores incorretamente.

2. Uma das rotas de uma companhia aérea parte da cidade A, faz escala na cidade B e, finalmente, chega à cidade C. A companhia aérea pretende criar uma nova rota, que parta da cidade A e chegue à cidade C, sem que haja escalas. Utilizando o esquema abaixo, determine a distância da nova rota.

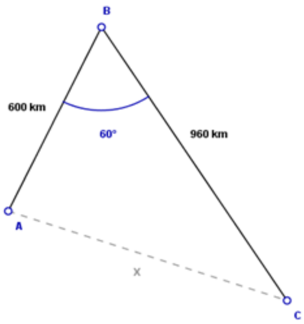

Figura 19. Questão 2 da segunda avaliação de aprendizagem.

3. Um homem parte do ponto A para atravessar um rio a nado. A correnteza faz com que a trajetória do nadador forme um ângulo de 30° com a margem do rio. Sabendo que a largura do rio nesse trecho é de 130 m e a distância entre o ponto A e C é de 200m, determine a distância da trajetória desse nadador.

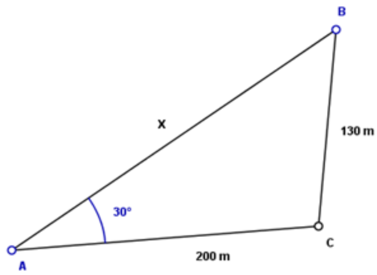

Figura 20. Questão 3 da segunda avaliação de aprendizagem.

Três alunos da turma controle acertaram a terceira questão (Figura 20). Quatro não calcularam x ao quadrado, um apenas substituiu os valores na fórmula sem efetuar os cálculos e um substituiu os valores incorretamente. Na turma alvo, quatro acertaram a questão, três não calcularam x ao quadrado, três substituíram os valores incorretamente e um erro cálculos aritméticos e algébricos.

4. Calcule o valor de X na figura abaixo:

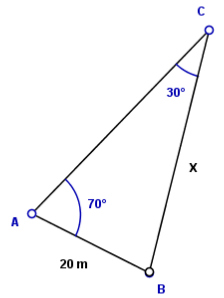

Figura 21. Questão 4 da segunda avaliação de aprendizagem.

Na quarta questão (Figura 21), na turma controle, seis alunos responderam corretamente, três trocaram os valores do seno e um não soube usar a propriedade fundamental da proporção. Seis alunos da turma alvo também acertaram a questão, mas quatro trocaram os valores do seno e um errou o cálculo de proporção.

5. (RIBEIRO, 2010) Sobre um rio, cujas margens são irregulares, deseja-se construir uma ponte que ligue os pontos A e B. Um topógrafo realizou as medições necessárias, obtendo a seguinte figura:

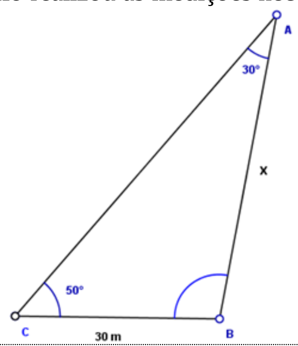

Figura 22. Questão 5 da segunda avaliação de aprendizagem.

Cinco alunos da turma controle acertaram a quinta questão (Figura 22) e cinco trocaram os valores do seno. Na turma alvo, quatro acertaram-na, quatro deixaram-na em branco e dois trocaram os valores do seno. A falha mais comum foi não substituir os valores de seno adequadamente (Figura 23).

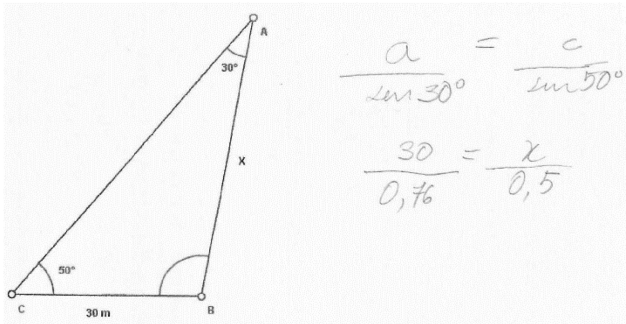

Figura 23. Resolução da questão 5 da segunda avaliação por um aluno.

A tabela 2 mostra o desempenho das turmas através da média e desvio padrão de cada questão. O maior índice de acertos da turma controle foi na terceira questão e da turma alvo, na primeira. A questão com menor índice de acertos em ambas foi a quinta, Alguns alunos nem tentaram resolvê-la. Outros trocaram os valores dos senos aos substituí-los nas fórmulas. Esse engano ocorreu também recorrentemente na quarta questão. O motivo, provavelmente, foi proveniente de desatenção, não de falta de conhecimento matemático. Silva e Moita (2010) destacaram o desinteresse e a desatenção como causas do baixo aproveitamento em matemática.

Tabela 2. Média e desvio padrão por questão da segunda avaliação das turmas controle e alvo.

Turma controle					
Segunda avaliação	1ª questão	2ª questão	3ª questão	4ª questão	5ª questão
Média	0,55	0,61	**0,68**	0,66	**0,53**
Desvio padrão	0,80	0,72	0,84	0,94	0,90
Turma alvo					
Segunda avaliação	1ª questão	2ª questão	3ª questão	4ª questão	5ª questão
Média	**0,67**	0,60	0,63	0,60	**0,44**
Desvio padrão	0,87	0,85	0,88	0,92	0,83

Nas demais questões, as falhas mais comuns deram-se e em cálculos aritméticos ou algébricos, apontadas como frequentes também por Chiréia (2013).

Análise estatística das notas das avaliações

A turma com abordagem tradicional foi tomada como o grupo controle enquanto a turma com abordagem enriquecida pelo software foi considerada o grupo alvo. Uma opção metodológica teria sido aplicar em ambas as turmas somente uma avaliação, seguida da comparação direta entre as duas médias de notas. Entretanto, tal procedimento seria obviamente inadequado, porque partiria do pressuposto de que as turmas teriam previamente habilidades e competências idênticas.

A fim de lograr resultados fidedignos foi preciso divisar uma metodologia avaliativa que permitisse contornar a limitação imposta pela inexistência de qualquer base prévia de comparação entre as turmas. A metodologia escolhida consistiu em aplicar em cada turma duas avaliações consecutivas, consideradas de mesmo nível de dificuldade. A primeira ocorreu após a apresentação inicial do conteúdo. As turmas então passaram por um reforço pedagógico, após o qual foi realizada a segunda avaliação.

As avaliações das turmas compartilharam as mesmas questões. A diferença entre a segunda nota e a primeira forneceu uma medida do progresso de cada aluno. Desse modo, a média dos progressos da turma alvo (abordagem enriquecida) pôde ser comparada estatisticamente com a média dos progressos da turma controle (abordagem tradicional).

As notas obtidas pelos estudantes nas avaliações da turma controle e da turma alvo são apresentadas na tabela 3. Apenas as notas dos alunos que realizaram as duas avaliações foram aproveitadas. Além disso, notas repetidas nos extremos da escala não refletem adequadamente se houve melhora ou piora do desempenho dos alunos, pois são determinadas em parte por outros fatores além da aprendizagem em si. Por isso, essas ocorrências também foram excluídas das amostras. Assim, a amostra da turma controle ficou com 13 valores e a amostra da turma alvo, com 17.

O primeiro passo da análise estatística foi verificar se a hipótese de normalidade de distribuição era adequada para a amostra de progressos da turma controle e para a amostra de progressos da turma alvo. Para tanto, foi usado o teste de normalidade de Shapiro-Wilk com nível de significância de 5%. Ambas as amostras de progressos satisfizeram o critério de normalidade.

Tabela 3. Notas das avaliações dos alunos das turmas controle e alvo.

Turma controle				**Turma alvo**			
Alunos	1ª avaliação	2ª avaliação	Diferença	**Alunos**	1ª avaliação	2ª avaliação	Diferença
A	1,00	5,50	4,50	A	6,50	9,50	3,00
B	6,00	9,50	3,50	B	4,50	8,00	3,50
C	6,00	1,00	-5,00	C	10,00	0,00	-10,00
D	3,50	9,50	6,00	D	5,00	8,00	3,00
E	0,00	1,50	1,50	E	6,50	7,00	0,50
F	6,50	9,00	2,50	F	2,50	0,00	-2,50
G	3,50	2,00	-1,50	G	6,00	0,00	-6,00
H	3,50	0,00	-3,50	H	2,00	0,00	-2,00
I	2,00	8,00	6,00	I	6,50	2,00	-4,50
J	2,50	5,50	3,00	J	4,50	4,00	-0,50
L	2,00	5,50	3,50	L	6,00	2,00	-4,00
M	2,50	0,00	-2,50	M	10,00	7,50	-2,50
N	0,00	0,50	0,50	N	2,50	5,50	3,00
				O	6,00	7,00	1,00
				P	2,00	4,00	2,00
				Q	0,00	6,00	6,00
				R	2,00	0,00	-2,00

Antes, porém, de confrontar os progressos das duas turmas, uma inspeção perfunctória da amostra de progressos da turma alvo chamou a atenção para um dado destoante com o exacerbado valor de -10 (aluno C da turma alvo). Um aluno obteve nota 10 na primeira avaliação e 0 (zero) na segunda. Evidentemente, fatores excepcionais, alheios ao reforço pedagógico ministrado no interstício entre as avaliações, interferiram no rendimento.

A ocorrência de valores possivelmente extremados na amostra de progressos da turma alvo levou a utilização do critério de rejeição de Pierce. Esse refusa medidas extremadas dentro da amostra se após sua exclusão a nova amostra ficar mais próxima da normalidade do que a amostra original.

Aplicado à amostra dos progressos da turma alvo, o teste de Pierce rejeitou o valor -10. Nenhum outro valor foi rejeitado. Feita a exclusão, a amostra ficou com 16 valores. Um novo teste de normalidade Shapiro-Wilk foi aplicado à amostra remanescente e a hipótese de normalidade foi aceita com 5% de nível de significância.

O passo final da análise estatística consistiu em comparar os progressos alcançados pelas duas turmas. Com esse objetivo, recorreu-se ao teste *T* de duas amostras não pareadas com variâncias diferentes (número de graus de liberdade efetivos dado pela aproximação de Welch-Satterthwaite). O teste *T* não pareado é considerado robusto com relação à hipótese de normalidade para duas amostras de tamanhos superiores a 15; quer dizer, apesar dele, em princípio, pressupor uma distribuição normal dos valores das amostras, ainda assim fornece resultados estatisticamente significantes mesmo para distribuições marcadamente não normais, desde que as amostras possuam ao menos 15 valores, e, idealmente, 30. Todavia, ambas as amostras de progressos das turmas tiveram a normalidade previamente avalizada.

Como hipótese nula do teste tomou-se a suposição de que o progresso médio da turma alvo seria igual ao progresso médio da turma controle. Evidentemente, a hipótese alternativa foi o progresso médio da turma alvo ser diferente do da turma controle. O teste *T* executado com nível de significância 5%[3] não mostrou haver evidência estatística suficiente para rejeitar a hipótese nula, ou seja, não houve por que considerar o progresso da turma alvo significativamente diferente do da turma controle. O mesmo teste, quando realizado com sensibilidade reduzida para nível de significância 10%[4], também não indicou a existência de evidência estatística de que os progressos médios das notas teriam sido diferentes nas duas turmas.

Logo, os dados estatísticos levantados na pesquisa não foram suficientes para apontar conclusivamente se a abordagem pedagógica enriquecida com o uso do C.a.R. foi superior ou inferior frente à abordagem tradicional.

Segundo as percepções dos autores, o emprego do software beneficiou os alunos. Durante as aulas com abordagem tradicional, as turmas ficaram atentas e participativas, mas não demonstraram curiosidade em aprender. Contudo, durante o reforço com o auxílio do C.a.R. na turma alvo, o aluno, apesar de não estar fazendo uma avaliação formal, demonstrou entendimento do que foi trabalhado e discutido. Afinal, fazia comentários sobre o significado e a aplicabilidade do conteúdo, apontava

[3] Variável teste T = -1,184342; número de graus de liberdade efetivos n = 25,19373 ≈ 25; hipótese alternativa de a média dos progressos da turma de ensino enriquecido ser diferente da média dos progressos da turma de ensino tradicional; valor crítico t_c = ± 2,059538.

[4] Variável teste T = -1,184342; número de graus de liberdade efetivos n = 25,19373 ≈ 25; hipótese alternativa de a média dos progressos da turma de ensino enriquecido ser diferente da média dos progressos da turma de ensino tradicional; o valor crítico t_c = ± 1,708141.

erros nos procedimentos de resolução das questões e comentava as soluções obtidas. Também quase não houve dúvidas em resolver as atividades propostas. O software educativo funcionou como um recurso didático motivador que tornou o aluno mais ativo na construção de seu conhecimento.

Se a avaliação tivesse sido realizada imediatamente após o reforço, provavelmente, as notas teriam sido melhores, pois os alunos estavam motivados. O fato de a avaliação ter sido realizada em outro dia parece ter prejudicado o desenvolvimento dos alunos e promovido à perda da motivação produzida pelo C.a.R.. Muitos inclusive alegaram não terem estudado o que sugere serem necessários estímulos constantes e contínuos para promover o processo de ensino-aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa comparou o desempenho de alunos na aprendizagem em leis dos senos e dos cossenos quando as aulas são ministradas por abordagem tradicional ou enriquecida com o uso de um software matemático educativo, o C.a.R..

Os principais erros dos alunos em questões de leis dos senos e dos cossenos foram: não resolver as expressões até encontrar o resultado final, empregar a fórmula incorreta, substituir valores erradamente, cálculos aritméticos e algébricos (operação com números não inteiros, regra de sinais, divisão de números naturais por decimais, potenciação, raiz quadrada, proporcionalidade) e aplicação de conceitos geométricos (teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer). Chiréia (2013), Guerato (2008), Pacheco (2014), Pavanello (1993), Penna (2014), Romanatto (2012), Tavares (2014) e Zuin (2002) descreveram dificuldades semelhantes, mas na aprendizagem de outros conteúdos matemáticos.

A análise estatística não apontou conclusivamente se a abordagem enriquecida com o emprego do C.a.R. foi superior ou inferior frente à abordagem tradicional. Todavia, segundo as percepções dos autores, a utilização do recurso tecnológico contribuiu para o aprendizado por instigar a curiosidade, motivar a participação, facilitar a construção e a visualização de figuras geométricas e permitir testar e acompanhar estratégias de resolução de questões. Além do aspecto motivacional, outro benefício do C.a.R. foi funcionar como um caderno de rascunho interativo e dinâmico. Na abordagem tradicional, o aluno não podia testar suas táticas de resolução com rapidez, nem visualizar os triângulos facilmente.

Softwares educativos podem ser usados para o processo de ensino-aprendizagem de matemática, mas é importante não deixar a abordagem tradicional de lado. O ideal é trabalhar simultaneamente os dois métodos didáticos. Mas o professor deve conhecer bem o C.a.R. para desenvolver atividades em sala de aula, de modo a aproveitar adequadamente suas ferramentas em prol da aprendizagem (por exemplo, a configuração de cores e espessuras para destaque nas construções) e ajudar o aluno a acompanhar todos os passos das atividades.

A contextualização, mesmo ao empregar um software, também é essencial para promover a aprendizagem, pois a relação com o cotidiano do aluno propicia o interesse e a motivação. Então, durante a resolução de questões, uma boa estratégia é sugerir exercícios de aplicação direta de fórmulas e problemas onde as situações propostas façam o aluno perceber a aplicabilidade do conteúdo fora da sala de aula.

REFERÊNCIAS

BATISTA, S.C.F.; BARCELOS, G.T.; HORA, H.R.M.; AFONSO, F.F. Tecnologias de informação e comunicação no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005, Salvador. **Anais eletrônicos**... Salvador: UFBA, 2005. Disponível em: <http://www.es.iff.edu.br/softmat/projetotic/download/leitu/TICnoProcessodeEnsaprenddeMatematica.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2014.

BAUERLEIN, M. Hyper hype, will digital learning be killed by kindness? **Education Next**, p. 74-75, 2012.

BOERI, C.N.; SILVA S.L. Novas tecnologias no ensino-aprendizagem da matemática: o uso da informática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais eletrônicos**... Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2660/990>. Acesso em: 1 jun. 2014.

BITTENCOURT, J. Informática na educação? Algumas considerações a partir de um exemplo. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 23-36, jan. 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 2000.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 2002.

CHIRÉIA, J.V. Trabalhando com a resolução de problemas na Educação Básica. **Portal dia a dia educação**, 2013. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/74-4.pdf>. Acesso em: 22 set. 2014.

COSTA, B.J.F.; TENÓRIO, T.; TENÓRIO, A.. A Educação Matemática no Contexto da Etnomatemática Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, dez. 2014 (em impressão).

D'AMBRÓSIO, B.S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. **Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática**, Brasília, ano 2, n. 2, p. 15-19, 1989. Disponível em: <http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2014.

DOSCIATI, A.; PIVA, C.; DORNELES, L.D.; SPILIMBERGO, A.P. Softwares livres potenciais para o ensino de matemática. 2013. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/4ANDREFORLINDOSCIATI.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2014.

ESTEVEZ F.R. **Discutindo o papel das tecnologias informacionais e comunicacionais na formação de professores de matemática:** uma proposta para um curso de licenciatura em matemática na modalidade EaD. 2010. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2010.

FERNANDES, R. U. **Estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para o ensino de trigonometria na circunferência**. 2010. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

GRAVEN, M. Mathematical learning opportunities for young learners with touch screen technology. **Learning and Teaching Mathematics**, vol. 9, p. 43-45, 2011.

GRAVINA, M.A. Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. **Anais Eletrônicos...** Belo Horizonte: UFMG, 1996. Disponível em: <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/artigo.htm>. Acesso em: 1 jun. 2014.

GUERATO, E.T. **Dificuldades e Possibilidades no Ensino da Geometria no EJA**. 2008. 91 f. Dissertação (Curso de Especialização em Educação Profissional Técnica de Nível Médio na Modalidade EJA) – Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo, São Paulo, 2008.

HOFFMANN, D.S. Relato de Experiência: A Geometria e o Cabri Géomètre na Licenciatura em Matemática da UFRGS. In: CONGRESSO SUL-BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO-ÁREA EXATAS, 1., 2000, Porto Alegre. **Anais**... Porto Alegre: UFRGS, 2000. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/EDUCACAO_E_TECNOLOGIA/RELATO.PDF>. Acesso em: 1 jun. 2014.

NOÉ, M. Lei dos Cossenos. Brasil Escola. 2013. Disponível em: <http://www.brasilescola.com.br/matematica/lei-coseno.htm>. Acesso em: 29 mar. 2014.

PACHECO, C.B.L.P.M. **Abordagem construtivista com o software régua e compasso no ensino-aprendizagem de triângulos.** 2014. 91 f. Trabalho de Conclusão de Curso

(Especialização em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2014.

PAVANELLO, R.M. O abandono da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, Campinas, v.1, n. 1, p.7-17, mar. 1993.

PEDROSO, L.W. **Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software Geogebra**. 2012. 171 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

PENNA, P. **O estudo de função polinomial do 1º grau na 1ª série do ensino médio através do jogo Save Our Dumb Planet e do desafio Prodigi.** 2014. 56 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática) –Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2014.

PIAGET, J. Para onde vai a educação? In: PIAGET, J.; GRECO, P. **Aprendizagem e Conhecimento.** São Paulo: Freitas Bastos, 1974.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia.** 1. ed. São Paulo: SCIPIONE, 2010.

RIO DE JANEIRO. SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO RIO DE JANEIRO. **Currículo Mínimo 2012 Matemática.** 2012. 23 p. Disponível em: <http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/cm_materia.asp?M=10>. Acesso em: 1 dez. 2014.

RIGONATTO, M. Lei dos Cossenos. Alunos Online. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/lei-coseno.htm>. Acesso em: 29 mar. 2014.

ROCHA, M.L.P.C. Notas conceituais e históricas da Trigonometria Plana e Esférica. 2009. In: CONGRESSO DE PESQUISA E INOVAÇÃO DA REDE NORTE NORDESTE DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA, 4., 2009, Belém. **Anais**... Belém: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, 2009. Disponível em:<http://connepi2009.ifpa.edu.br/connepi-anais/artigos/226_1765_1394.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2014.

ROMANATTO, M.C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 299-311, mai. 2012.

SILVA, C.R. Da. Lei dos Senos e Cossenos. Diadematem@atica. 2013. Disponível em: <http://diadematematica.com/vestibulares/tag/geometria/>. Acesso em: 13 mai. 2014.

SILVA, J.J.; MOITA, F.M.G.S.C. O software régua e compasso: possibilidades de construção de conceitos geométricos. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA DA MATEMÁTICA, 5., 2010, Recife. **Anais**... Recife, 2010.

SILVA M.F. **Trigonometria, Modelagem e Tecnologias: um estudo sobre uma sequencia didática**. 2011. 238 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

TAVARES, M.A.O. **Correlação estatística entre o uso de jogos educativos de computador e a aprendizagem matemática de função do 1º grau.** 2014. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática)– Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2014.

TENÓRIO, T.; LEITE, R.M.; TENÓRIO, A. Séries televisivas de investigação criminal e o ensino de ciências: uma proposta educacional. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, vol. 13, n. 1, p. 73-96, jan. 2014. Disponível em: <http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen13/REEC_13_1_5_ex779.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2014.

ZUIN, E.S.L. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental e o Ensino das Construções Geométricas entre outras considerações. In: REUNIÕES ANPED, 25., 2002. **Anais**... CD-ROM.

Submetido: junho de 2014

Aceito: outubro de 2014