A Interação de Aspectos Algorítmicos, Intuitivos e Formais e o Desenvolvimento de Processos do Pensamento Matemático Avançado na Aprendizagem Matemática

Interaction of Algorithmic, Intuitive and Formal Aspects and Development of advanced Mathematical Thinking in Mathematics Learning

William Vieira[a]; Vera Helena Giusti de Souza[b]*; Roberto Seidi Imafuku[c]

[a]Instituto Federal de São Paulo
[b]Universidade Estadual de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística. SP, Brasil.
[c]Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de *Stricto Sensu*, Educação Matemática. SP, Brasil.
*E-mail: vhgiusti@ime.usp.br

Resumo

Apresentamos uma situação de aprendizagem matemática na qual pode-se observar o desenvolvimento de processos do Pensamento Matemático Avançado como representação, tradução, visualização e generalização e o papel que a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais desempenha no desenvolvimento desses processos.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado; Aspectos algorítmicos, intuitivos e formais.

Abstract

We present a situation of mathematics learning in which one can observe the development of Advanced Mathematical Thinking processes as representation, translation, visualization and generalization and the role the interaction of algorithmic, intuitive and formal aspects plays in the development of these processes.

Keywords: *Advanced Mathematical Thinking; Algorithmic, intuitive and formal aspects.*

1 Introdução

Apresentamos neste artigo uma análise de uma situação de aprendizagem matemática, tomando como referencial teórico o desenvolvimento dos processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991) e a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais colocados por Fischbein (1994). Temos defendido e exemplificado o uso compartilhado desses referenciais teóricos na interpretação de situações didáticas e, no que segue, procuramos aprofundar essa discussão, com a análise de uma intervenção, com uma estudante da 3ª série do Ensino Médio do Brasil (16-17 anos de idade).

Segundo Carmo & Igliori (2017), investigações que utilizam processos do Pensamento Matemático Avançado estão concentradas, em sua maioria, no Ensino Superior, e trabalhos que versam sobre temas da Educação Básica abordam processos específicos, como visualização (Costa, 2002) ou não propõem o desenvolvimento do processo de tradução (Santos, 2011; Santos & Bianchini, 2013), que consideramos difícil e importante e procuramos desenvolver na atividade descrita neste trabalho.

2 Aspectos Algorítmicos, Intuitivos e Formais

Fischbein (1994) argumenta sobre a necessidade de observarmos se há ou não a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, quando um sujeito está em atividade matemática. Isto significa olhar a Matemática como um processo criativo e não como um corpo de conhecimentos estruturado e já estabelecido; quando atentamos para este processo criativo, entendemos a Matemática como uma atividade humana, que envolve momentos de "iluminação, hesitação, aceitação e refutação".

No que diz respeito aos processos de ensino de conceitos e ideias matemáticas, entendemos que a interação desses três aspectos deve guiar nossas escolhas e práticas, se desejamos que nossos estudantes sejam capazes de produzir afirmações matemáticas, construir provas e avaliar, formal e intuitivamente, a validade dessas produções.

No que segue, apresentamos e exemplificamos cada um dos aspectos destacados por Fischbein (1994).

O *aspecto formal* refere-se aos axiomas, definições, teoremas e demonstrações, que compõem o núcleo das ciências matemáticas e precisam ser considerados quando analisamos o processo de criação em Matemática. Fischbein (1994) reitera que axiomas, definições, teoremas e provas têm de penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio. Eles devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente pelo estudante. Além disso, aponta que o pensamento proposicional e o uso de construções hipotético-dedutivas não são adquiridos espontaneamente pelos jovens e que somente um adequado processo de ensino pode dar a esses elementos formais características verdadeiramente funcionais.

O *aspecto algorítmico* corresponde às técnicas e procedimentos de resolução, que também têm um caráter fundamental no processo de entendimento e criação, pois apenas o conhecimento das estruturas formais (axiomas, definições, teoremas) não é suficiente para conferir habilidades para resolver problemas. Segundo Fischbein (1994) esta profunda simbiose entre significado e habilidades é condição básica para o produtivo e eficiente raciocínio matemático.

O *aspecto intuitivo* diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva. A intuição cognitiva é o que um sujeito considera auto-evidente e não vê necessidade de prova ou justificação, como afirmações do tipo "A parte é menor que o todo" ou "Multiplicar um número sempre o torna maior". Devido à sua natureza, o conhecimento intuitivo exerce um papel coercivo no raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas. Se estiver de acordo com verdades logicamente justificáveis, pode se tornar um facilitador do processo de conhecimento; caso contrário, torna-se um caminho para contradições e equívocos – como no caso das afirmações apresentadas – e podem se configurar em dificuldades para o processo de aprendizagem.

Fischbein, Tiroshi, & Melamed (1981) destacam que o conceito de intuição não está claramente definido e diferentes autores apresentam várias possibilidades de interpretação para este conceito. Apesar disso, a *imediatez* do conhecimento intuitivo parece ser comumente aceita. Reiteramos que apresentar uma solução ou interpretação intuitiva para um problema significa lançar mão de um conhecimento sem que seja necessário estar consciente de uma justificativa detalhada ou formal para a estratégia adotada. Por exemplo, é fácil aceitar, intuitivamente, que por dois pontos passa uma única reta; por outro lado, temos dificuldade em aceitar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. É importante reforçar que a intuição não deve ser reduzida à percepção, pois está sempre associada a uma interpretação.

Sobre o papel que o conhecimento intuitivo desempenha no processo de aprendizagem, Fischbein, Tiroshi, & Melamed (1981) alertam que

> O problema de identificar os vieses intuitivos naturais do aluno é importante porque afetam - às vezes de uma maneira muito forte e permanente – seus conceitos, suas interpretações, sua capacidade de compreender, de resolver e de memorizar em uma determinada área. Estamos naturalmente inclinados a manter interpretações que se adequam a esses vieses naturais e intuitivos, e esquecer ou distorcer aqueles que não se encaixam a eles.

Ainda sobre a interação de aspectos intuitivos e formais, Fischbein (1994) defende que nossa capacidade de processar uma informação não é controlada somente pelas estruturas lógicas, mas também por uma grande quantidade de modelos intuitivos, que agem de maneira implícita, colocando restrições e definindo caminhos para o raciocínio. Ele destaca também que a influência dos modelos intuitivos no pensamento matemático é mais importante e decisiva do que normalmente se acredita e sustenta que essa influência não se restringe a estágios pré-formais do desenvolvimento intelectual do indivíduo, mas que permanece agindo no processo de pensamento, mesmo após as estruturas formais do raciocínio estarem plenamente desenvolvidas.

Corbo (2012) apresenta o exemplo da obtenção da fração geratriz de um número racional escrito na forma decimal como uma situação na qual um algoritmo pode negligenciar aspectos formais importantes e desenvolver uma intuição equivocada. A autora analisa o problema de mostrar que a dízima é igual a a partir do procedimento, bastante comum em livros didáticos, de igualar a dízima a , multiplicar a igualdade por e subtrair as duas igualdades. Ao aplicar este algoritmo, estamos supondo que é um número, o que poderia não ser verdade, como é o caso da série harmônica . Este aspecto formal do processo é, geralmente, relegado nas explicações dadas nos livros didáticos (CORBO, 2012, p. 101).

A seguir, apresentamos as principais ideias relativas ao desenvolvimento dos processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo as posições de Tall (1991) e Dreyfus (1991).

3 Processos do Pensamento Matemático Avançado

Tall (1991) coloca em discussão aspectos psicológicos relativos ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado e suas influências e determinações na produção e no ensino da ciência matemática. Apoiado no desenvolvimento histórico e filosófico da Matemática, o autor defende que qualquer teoria sobre a psicologia da aprendizagem matemática deve considerar também as concepções dos matemáticos maduros e não somente o desenvolvimento conceitual dos estudantes, uma vez que a Matemática é um elemento cultural e existem aspectos que dependem do contexto no qual estão inseridos.

Seguindo Dreyfus (1991), entendemos o Pensamento Matemático Avançado como uma inter-relação de processos cognitivos como visualização, representação, classificação, tradução, generalização, justificação, síntese e abstração.

Nesse sentido, o Pensamento Matemático Avançado envolve todo o ciclo da atividade matemática, que vai desde o ato criativo da consideração de um problema, passa pela elaboração de conjecturas e estratégias de resolução, até chegar aos níveis de refinamento e prova; entretanto, esse ciclo pode ser ignorado nas disciplinas matemáticas no ensino universitário, quando apresentam aos alunos o produto final do pensamento matemático, ao invés dos processos desse pensamento. Assim, neste nível de ensino, pode haver uma supervalorização de processos de abstração e métodos dedutivos, em detrimento do desenvolvimento de processos heurísticos. Tall (1991) reforça que esta forma de apresentação do conhecimento matemático não cumpre o papel de dar aos estudantes todo o poder do pensamento avançado, na sua multiplicidade de processos e abordagens.

Para estabelecer uma distinção entre a Matemática como um sistema formal e como uma atividade mental, Tall e Vinner (1981) destacam que

> Muitos conceitos que usamos felizmente não são totalmente definidos de maneira formal, aprendemos a reconhecê-los pela experiência e uso em contextos apropriados. Mais tarde, esses conceitos podem ser refinados no seu significado e interpretados com o aumento da sutileza, com ou sem o luxo de uma definição precisa. Normalmente, neste processo, ao conceito é dado um símbolo ou um nome que lhe permite ser comunicado e auxilia na sua manipulação mental. Mas a estrutura cognitiva total que colore o significado do conceito é muito maior do que a evocação de um único símbolo. É mais do que qualquer imagem mental, seja ela pictórica, simbólica ou de outro tipo. Durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são colocados em jogo, afetando consciente e inconscientemente seu significado e uso.

Considerando essa caracterização, Tall (1991) defende que o conhecimento matemático seja abordado a partir de estratégias que privilegiem a estrutura do conhecimento e o processo de pensamento dos estudantes. Estes, segundo ele, devem adquirir *insights* dos métodos e processos da Matemática avançada, por caminhos que respeitem a transição de seus processos de pensamento.

Com esse panorama geral sobre as características psicológicas relacionadas ao desenvolvimento do pensamento matemático, resumimos a seguir os principais processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (1991).

O processo de *representação* é de especial importância para a produção e o ensino de Matemática, uma vez que só temos acesso aos objetos dessa ciência por meio de suas representações. Segundo Dreyfus (1991), representar um conceito significa gerar um caso, um espécime, um exemplo, uma imagem; mas esta breve descrição é insuficiente, porque não especifica nem indica o que "gerar" significa em termos de processos pelos quais as representações vêm à tona e como se desenvolvem. Este autor sustenta que existem dois tipos de representações: simbólicas e mentais. Os símbolos estão associados a signos (sinais) e a significados e tornam explícitos os significados do conhecimento implícito que um indivíduo tem sobre um dado conceito; uma *representação simbólica* é exteriorizada de forma escrita ou falada, geralmente com o objetivo de facilitar uma comunicação sobre o conceito. Uma *representação mental* refere-se a esquemas internos ou sistemas de referência que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior e pode variar de pessoa para pessoa.

O processo de *visualização* é um dos processos pelos quais as representações mentais podem passar a existir. A geração de representações mentais depende de sistemas de representação, de produções externas, concretas, que podem ser materialmente percebidas pelo sujeito. Dreyfus (1991) aponta que as representações mentais são criadas na mente com base nesses sistemas de representação concreta e que um sujeito pode criar, para certo conceito, uma única e simples representação, mas destaca que, para ter sucesso em Matemática, é necessário ter muitas representações mentais de um conceito, relacionadas a vários e diferentes aspectos desse conceito.

Nesse sentido, o processo de *mudança entre representações* tem papel de destaque, uma vez que a existência de várias representações não é suficiente para conferir um uso flexível e articulado de um conceito; é preciso saber transitar entre essas representações, de acordo com as situações que a resolução de um problema impõe.

O processo de *tradução* está relacionado de forma estreita com o processo de mudança entre representações. No caso do Pensamento Matemático Avançado, uma das significações relevantes desse processo de tradução diz respeito à reformulação de um problema ou proposição matemática em outro, de maneira a viabilizar ou facilitar a resolução do problema original.

Dreyfus (1991) sustenta que os processos de tradução e de mudança entre representações não são nada triviais para os estudantes, que ainda estão construindo seus esquemas mentais; por essa razão precisam ser reiteradamente trabalhados pelos professores, para que possam ser apropriados pelos estudantes.

Os processos destacados até aqui são fundamentais para a aprendizagem e estão presentes em todos os níveis do pensamento matemático, mesmo nos mais elementares; contudo, existem outros, que são desenvolvidos a partir do refinamento das habilidades e das experiências dos estudantes e que acontecem à medida que estes entram em contato com conteúdos matemáticos mais avançados. A *generalização* e a *síntese* são dois desses processos e, aliados aos processos apresentados, constituem a base para o desenvolvimento da *abstração*, um dos principais processos do Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991).

O processo de *generalização* consiste em deduzir ou induzir resultados gerais a partir de casos particulares e de características semelhantes identificadas, expandindo os domínios de validade das conclusões originais para contextos mais amplos.

O processo de *síntese* refere-se à capacidade de combinar ou compor partes de maneira a formar um todo coerente; este todo frequentemente agrega mais que a soma das partes que o compõem. Trata-se, de fato, de um processo que busca inter-relacionar resultados, ideias e algoritmos que foram aprendidos de maneira isolada, fragmentada e que ressurgem como fusão, mesclados em um novo resultado, um novo conhecimento, mais coeso e poderoso.

O processo de *abstração* é um processo construtivo, que vai da compreensão das propriedades e relações de objetos matemáticos para a compreensão das estruturas dessas propriedades e relações; essa construção da abstração pressupõe uma mudança no foco de atenção, que deve migrar dos objetos particulares para se concentrar em estruturas específicas e próprias das propriedades e das relações entre objetos.

Dreyfus (1991) destaca que os processos de visualização e de representação exercem papel importante no desenvolvimento da abstra**ção**. Imagens visuais podem apresentar características globais e enfatizar aspectos estruturais dos conceitos, fatores que são de grande ajuda na construção de abstrações. Ele aponta ainda que representações e abstrações são processos complementares, pois um conceito muitas vezes é abstraído a partir de várias representações e cada uma destas está associada a propriedades de um conceito abstrato; desta forma, o uso de várias representações de um conceito, trabalhadas conjuntamente, pode favorecer a abstração das relações e propriedades desse conceito.

A partir dessa perspectiva, o processo de aprendizagem pode ser visto em quatro estágios: (i) usar uma representação de um conceito; (ii) usar mais de uma representação de um conceito em paralelo; (iii) estabelecer relações entre as representações e (iv) integrar representações e transitar de maneira flexível entre elas; ao completar este ciclo, um processo de síntese ocorre e o sujeito apropria-se da noção abstrata do conceito em questão, tornando-se, de certa forma, “dono” do conceito (Dreyfus, 1991).

Acreditamos que a consolidação de conceitos e ideias matemáticas, para um sujeito, é caracterizada principalmente pela realização dos processos de generalização e de síntese e pode ocorrer quando há interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, presentes nas inúmeras representações, visualizações e traduções de cada conceito ou ideia matemática. Exemplificamos essas relações e o desenvolvimento do processo de generalização na situação de aprendizagem apresentada a seguir.

3.1 Análise de situação de aprendizagem

O problema a seguir foi apresentado para Fernanda, estudante do 3º ano do Ensino Médio de uma escola particular do Estado de São Paulo.

Problema Verifique se, num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa tem por medida a metade da medida da hipotenusa[1].

O procedimento metodológico utilizado contém elementos de uma entrevista reflexiva, entendida aqui como um encontro interpessoal que considera a subjetividade dos personagens envolvidos no processo e que possibilita a construção conjunta de um novo conhecimento, a partir do encontro de seus mundos sociais e culturais (SzymanskI, 2001).

Apresentamos uma possibilidade teórica de resolução desse problema discutimos a solução da aluna Fernanda. Para a realização da atividade, foram disponibilizados: lápis, borracha, régua e papel; num determinado momento, Fernanda solicita uma calculadora e tem seu pedido atendido pelo pesquisador. A intervenção foi áudio-gravada e teve 39 minutos de duração.

A princípio, o pesquisador solicita que Fernanda leia o enunciado em voz alta. Ao finalizar a leitura, ela faz alguns questionamentos, mostrando que não se lembra do conceito de mediana: “O que é mesmo a mediana? Mediana é o ponto médio? É onde corta a metade do segmento?”. Sem aguardar qualquer comentário do pesquisador, relê um trecho do enunciado: “A mediana relativa à hipotenusa... O que que é a mediana relativa à hipotenusa?” e vira-se para o pesquisador, esperando uma resposta. Ao não ser atendida, esboça um triângulo retângulo (Figura 1) e indica, com linhas tracejadas, a construção de um retângulo. O pesquisador questiona o porquê do retângulo e Fernanda responde: “Um triângulo retângulo é um retângulo dividido ao meio!”.

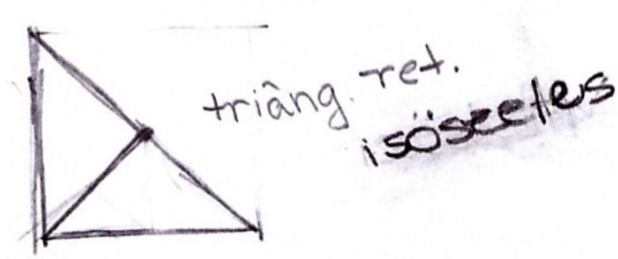
Nesse momento, a estudante apresenta desistência, pois não consegue se lembrar da definição de mediana, que o pesquisador apresenta a ela, que responde: “Era isso que eu queria saber...” e volta-se para o esboço que tinha começado, finalizando-o como indicado na Figura 1.

Figura 1 - Esboço de triângulo retângulo.

Fonte: Os autores.

Após a construção da Figura 1, Fernanda esboça um novo triângulo retângulo (Figura 2).

Figura 2 - Esboço de triângulo retângulo isósceles.



Fonte: Os autores.

Referindo-se à afirmação do problema, de maneira tímida, fala consigo mesma: “Bom, num triângulo retângulo isósceles sim...”. Ao ser questionada sobre o propósito desta nova figura e se ela estava de acordo com as informações disponibilizadas no problema, a estudante diz: “Estou indo passo a passo...”. Volta-se para a Figura 1 e estabelece-se o seguinte diálogo:

Fernanda (F): É verdade, porque um triângulo retângulo sempre divide um retângulo ou um quadrado em duas metades iguais, ... metade já é igual... tá... em duas metades...

Pesquisador (P): E daí?

1 Neste artigo, adotamos o termo verifique como sinônimo de prova/demonstração.

F: E daí que ele sempre divide o retângulo ou o quadrado ao meio e a sua hipotenusa equivale **à** diagonal desse quadrilátero, e se eu traçar ... ah! Não sei explicar... mas isso daqui (aponta a Figura 1) é como se eu tivesse fazendo o triângulo duas vezes, daí o meio é o local onde se encontram as duas diagonais, quer dizer, é como se fosse a diagonal do mesmo retângulo, só que ao contrário.

P: Tá, e daí?

F: E é sempre igual, quer dizer é metade...

P: O que é sempre metade?

F: Essa mediana aqui (aponta a Figura 1).

P: Tá, você está apontando uma ideia, mas não está justificando. Precisa provar isso.

F: E como é que eu provo isso? Não sei como vou provar isso, eu só sei que é verdade.

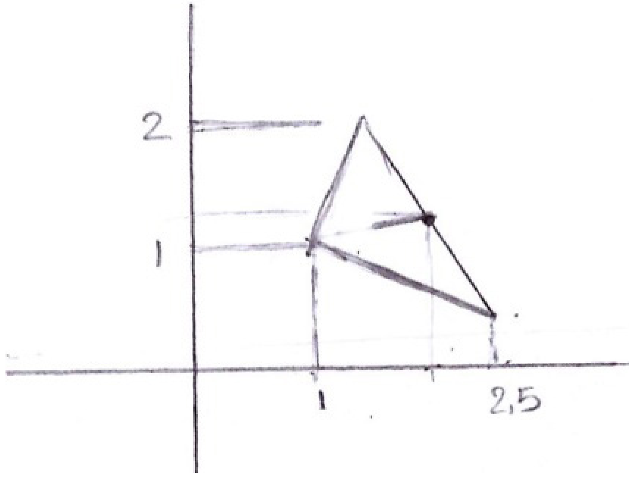
Após alguns minutos refletindo sobre a Figura 1, a estudante mostra-se sem estratégias para a resolução do problema e desiste.

Nessa primeira parte da discussão, podemos observar que Fernanda mobiliza aspectos intuitivos e formais na elaboração das Figuras 1 e 2; também é marcante a passagem em que a estudante solicita o conceito de mediana (aspecto formal) e rapidamente o articula à resolução do problema. Além disso, podemos constatar a força que a visualização das figuras desempenha na validação intuitiva do processo de convencimento da estudante sobre a verdade da afirmação do problema. A estudante também usa o processo de tradução do enunciado do problema (língua materna) para um esboço de figuras geométricas com bastante naturalidade, evidenciando um tipo de tradução/representação comumente trabalhada no ensino de Geometria na escola básica.

Por outro lado, a estudante se mostra incapaz de apresentar suas conclusões intuitivas de uma maneira formal. Entendemos que parte dessa dificuldade pode ser explicada por ela não ter apresentado, nas construções, uma linguagem formal, como nomear os vértices dos triângulos, por exemplo; embora seja possível verificar que Fernanda mobiliza alguns aspectos formais na elaboração das Figuras 1 e 2, há uma prevalência de aspectos intuitivos nas ideias indicadas por ela, que não interagem com aspectos formais, inviabilizando o desenvolvimento de uma justificativa formal.

Tendo em vista que a estudante está no 3º ano do Ensino Médio e trabalhando com o sistema cartesiano, o pesquisador aproveita a situação matemática para desenvolver o processo de tradução, diz para Fernanda que pense na Geometria Analítica e ela desenha a Figura 3.

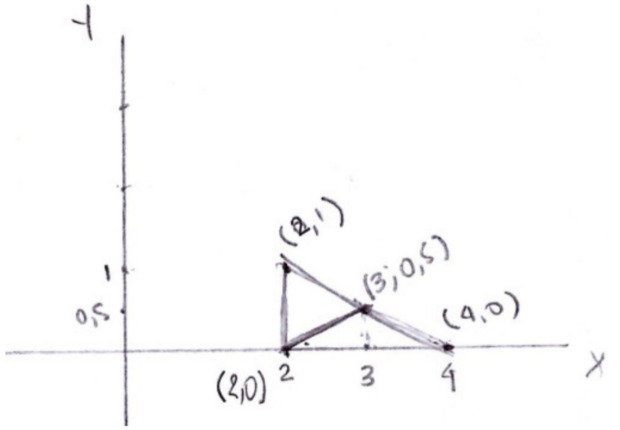
Figura 3: Esboço de triângulo no Plano Cartesiano.



Fonte: Os autores.

Fernanda leva alguns minutos refletindo sobre esse esboço e diz: “Tenho que somar isso aqui e dividir por dois... ah... que coisa difícil!”. Faz menção de apagar o esboço, mas **é** interrompida pelo pesquisador, que diz ter interesse na figura e pergunta: “Porque você vai apagar?”. Ela responde: “Porque vou fazer coordenadas mais fáceis”. O pesquisador insiste na Figura 3, apontando para os valores no eixo x: “Por que você usou 1 e 2.5?”, ela diz: “Porque parece mais perto... olha, 1, 2 e meio...”; então, Fernanda parte para um novo esboço (Figura 4).

Figura 4 - Segundo esboço de triângulo retângulo no Plano Cartesiano.



Antes de determinar o ponto médio , Fernanda faz uma reflexão em voz alta: “Como eu acho o meio mesmo? Eu não lembro mais isso... Ah! Tenho que somar, é x com x e y com y, dividido por dois...” e, em seguida, escreve as fórmulas das coordenadas do Ponto Médio de um segmento (Figura 5).

Figura 5 - Fórmulas das coordenadas do Ponto Médio.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Fernanda vira-se para o pesquisador e diz, apontando para a Figura 4: “Tá, agora é só calcular a distância desse ponto pra esse e desse pra esse, daí tá certo, né?”. O pesquisador devolve a pergunta: “Não sei! É? Qual é a pergunta do problema? Leia o enunciado novamente!”. Ela relê o enunciado e aponta na Figura 4 para a mediana e para a metade da hipotenusa, e diz: “Se esse daqui é igual a isso...”.

Convencida do que deveria fazer, diz: “Então preciso usar distância de pontos. Como é mesmo essa fórmula?” e escreve

Figura 6: Distância entre ‘pontos e ‘

$$d = \sqrt{(4-3)^2 + (0-0,5)^2}$$
$$\underline{d = \sqrt{1 + 0,25}}$$
$$d = 1,11$$

Nesse ponto, Fernanda solicita a calculadora e, ao observar o número $1,118033989$, uma aproximação de $\sqrt{1,25}$, escreve $d = 1,11$ (Figura 6).

Em seguida, calcula a distância entre os pontos e .

Figura 7: Distância entre ‘pontos e ’

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (0,5-0)^2}$$
$$\underline{d = \sqrt{1 + 0,25}}$$

Ao chegar em $d = \sqrt{1 + 0,25}$, Fernanda, de maneira bastante entusiasmada, diz: “Pronto! Nem precisa fazer conta! Deu igual! Provado!”. Os grifos das Figuras 6 e 7 foram acrescentados nesse momento, para destacar a igualdade.

Uma característica importante dessa etapa da entrevista é o fato de Fernanda, mesmo tendo conhecimentos significativos de Geometria Analítica, não ser capaz de fazer uso espontaneamente desses recursos. De fato, ela não foi capaz, ao fracassar em suas primeiras tentativas, de fazer uma tradução do problema para um ambiente que fosse mais favorável para a resolução; ao contrário, precisou ser *motivada* pelo pesquisador a buscar esse outro caminho. Essa situação corrobora a posição defendida por Dreyfus (1991), que destacamos anteriormente, de que os processos do Pensamento Matemático Avançado precisam ser ensinados e trabalhados pelos professores, para que se tornem uma estratégia de abordagem efetiva para os estudantes.

A resolução apresentada pela estudante indica uma forte presença de aspectos intuitivos numéricos, como destacam as Figura 3 e 4; também podemos identificar o papel que o processo de visualização desempenha na mudança entre as representações dessas figuras. Fernanda, ao notar que o esboço da Figura 3 não é capaz de ajudá-la, constrói a Figura 4, mais adequada aos seus propósitos. Entendemos que a estudante articula aspectos intuitivos, algorítmicos e formais ao fazer essa mudança de representações. De fato, ao construir o segundo triângulo (Figura 4) de base sobre o eixo e lados medindo e , há uma articulação de aspectos intuitivos e algorítmicos dos elementos da Figura 3, pouco funcional, com essa nova representação; além disso, Fernanda mobiliza novos aspectos formais de Geometria Analítica na Figura 4, ao registrar os vértices do triângulo como coordenadas do plano, notações mais úteis para a nova estratégia de resolução. Há ainda uma forte interação entre aspectos algorítmicos e formais no registro e no uso das fórmulas do ponto médio e da distância entre pontos, etapa do trabalho que a estudante realiza com bastante destreza.

No entanto, a discussão realizada até este ponto da entrevista deixa evidente que Fernanda tem uma percepção bastante empírica e confusa sobre o que seja a verificação de um resultado em Matemática e acreditamos que essas dificuldades se devem ao fato do ensino de Matemática na escola básica valorizar pouco o trabalho com justificativas e generalizações.

Em seguida, se estabelece o diálogo.

P: Você então acha que isso verifica? Que isso prova a afirmação do problema?

F: Sim, ué? As distâncias entre os dois... entre isso e isso é igual, é isso que você está perguntando... se a metade de isso daqui é igual a essa daqui (aponta a Figura 4). É!

Então, o pesquisador faz novos questionamentos, nos quais fornece algumas informações relativas ao que se espera de uma prova.

P: Tá, mas eu não perguntei sobre um triângulo de lados , e raiz de . Não perguntei isso. A afirmação é sobre um triângulo retângulo qualquer! Então, me explica o que você fez aqui (aponta a Figura 4).

F: Eu peguei um triângulo retângulo qualquer, só que daí...

P: Não, não... esse (aponta a Figura 4) não é um triângulo retângulo qualquer. É um triângulo específico, ele tem nome, sobrenome e endereço.

F: Ah tá, um triângulo aleatório...

P: Tá, você escolheu um exemplo aleatório. E você acha que usando esse triângulo aleatório prova a afirmação?

F: Sim, porque o princípio de todo triângulo retângulo é igual! As propriedades de todo triângulo retângulo são iguais.

P: De que propriedades você está falando?

F: Ele tem um ângulo reto, portanto ele divide um quadrilátero ao meio (aponta a Figura 1)...

P: Tá, mas você está voltando para outra situação. Vamos voltar pra cá (aponta a Figura 4). O que você está pensando aqui? Para você, então, esse argumento justifica a afirmação?

F: Não! Mas deveria...

P: Por que não?

F: Ah... porque... sei lá, existem infinitos triângulos retângulos...

P: Existem infinitos triângulos retângulos. Verdade, isso é verdade. Então...

F: Eu preciso achar um jeito de provar genericamente pelas propriedades e não por números, tá entendi. Porque todas as propriedades são iguais, os números não são iguais...

Esta parte da discussão reforça o papel que aspectos intuitivos numéricos desempenham nos processos de pensamento da estudante; por outro lado, Fernanda apresenta indícios de raciocínios genéricos, ainda que de maneira empírica, quando justifica sua resolução dizendo que "As propriedades de todo triângulo retângulo são iguais". Entendemos que a maneira como a estudante se convence, após as instruções fornecidas pelo pesquisador, do caráter parcial de sua resolução e quando afirma "Porque todas as propriedades são iguais, os números não são iguais" também indicam potencialidades latentes para o desenvolvimento de processos de generalização. A discussão sobre a elaboração de uma justificativa formal para o problema continua no diálogo a seguir.

P: Sim, aqui você está particularizando um triângulo. Pode ser que tenha funcionado para este triângulo específico. Agora, você não conseguiria repetir este processo (aponta as Figuras 5, 6 e 7) de maneira que não fosse particularizada?

F: Você quer que eu coloque letras? Que faça por fórmulas?

P: Não sei. É nisso que você está pensando?

F: Não... não consigo pensar sem ser algebricamente....

P: Mas aqui você está pensando numericamente....

F: Isso, isso mesmo! Numericamente, por formulinhas ... não sei pensar de outro jeito... (pausa) Tá, então tem que provar algebricamente!

Então, há uma nova pausa na conversa, enquanto Fernanda olha para a resolução que havia apresentado e depois diz: "Ah, necessariamente esse ponto aqui vai ter que ser metade dessa coordenada, desse, desse ponto... (aponta a Figura 4). E a distância vai dar igual...".

P: Tá, mas você não tem que falar, tem que escrever o que está pensando.

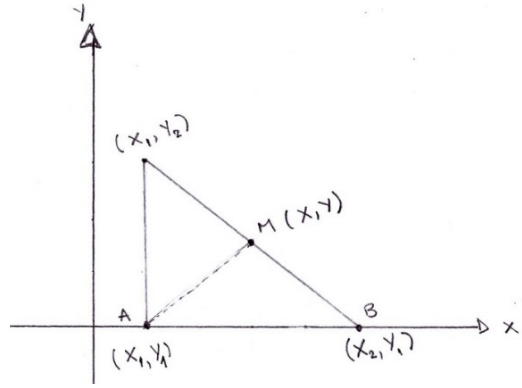
F: Mas eu não sei escrever isso...

P: Isso o que?

F: Isso que eu tô falando... que eu tô pensando.

Nesse ponto o diálogo é interrompido e Fernanda passa a analisar novamente sua resolução; pega uma nova folha de papel e começa a elaborar o triângulo destacado na Figura 8.

Figura 8 - Triângulo retângulo genérico.



Em certo ponto da construção da Figura 8, Fernanda vira-se para o pesquisador e diz: "Eu acho que eu não tô provando nada, porque ele é isósceles... e eu não tô provando nada com nada".

P: Por que isósceles?

F: Sei lá, porque tenho a impressão que tem muito , e , ... e tá meio confuso. Mas vamos andando e ver onde que sai...

Fernanda segue construindo a Figura 8 e, antes de marcar o ponto , reescreve as fórmulas do ponto médio.

Figura 9 - Coordenadas do Ponto Médio.

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Repete o que havia feito no exemplo numérico e segue para a aplicação da fórmula da distância entre dois pontos (Figura 10).

Figura 10 - Distância entre pontos

$$d_{AM} = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{2x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{y_1}{2}\right)^2}$$

$$d_{AM} = \sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}$$

$$d_{AM} = \sqrt{\frac{x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2}{4} + \frac{y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2}{4}}$$

$$d_{BM} = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{2x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{2y_1}{2}\right)^2}$$

$$d_{BM} = \sqrt{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2}$$

$$d_{BM} = \sqrt{\frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4} + \frac{y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2}{4}}$$

Ao finalizar a distância entre e , enquanto compara com diz, de maneira entusiasmada: "Pronto! Deu a mesma coisa? Deu a mesma coisa! Olha que lindo! Provei agora?".

P: Não sei. Provou? É você quem tem que me dizer.

F: Provei! Tá provado! As distâncias são iguais, eu usei coisas hipotéticas... esse daqui pode ser qualquer , qualquer , qualquer coisa.

P: Tá, entendi. Tenho mais perguntas. Este ponto aqui (aponta a Figura 8) por que você chamou de ?

F: Podia ser e ...

P: Tá, mas ele não está sobre o eixo ?

F: E daí?

P: E daí? Eu que pergunto. E daí?

F: O zero também é um número!!! (Bastante enfática)

P: Também é um número, mas e daí?

F: Eu quero representar o zero ... como um ... não, ... como . Você quer colocar o zero aqui? (aponta na Figura 10) Vai dar certo também! Olha, zero, zero, cancelou, cancelou ... vai dar tudo certo... (risos).

P: Tá, mas você acha então que colocando o zero eu não estou mais trabalhando genericamente?

F: Não...

P: Porque aqui (aponta a Figura 4) você trabalhou no particular, com o ponto , e aqui (aponta a Figura 8) você também marcou um ponto sobre o eixo , mas usou . Por que este é e esse é ?

F: Porque eu queria fazer genérico, eu não queria colocar o zero aí... Porque se ele fosse zero e eu fosse fazer com outro triângulo que não tivesse no eixo não teria lugar pro outro número, daí eu teria que fazer tudo de novo e não serviria pra nada.

P: Ah... entendi. Quer dizer então que pra ser genérico esse cara aqui tem que ser ?

F: Exato...

Nesta última etapa da discussão, que se inicia na pergunta do pesquisador para que Fernanda repita os procedimentos de forma não particularizada, há uma interação entre aspectos algorítmicos e formais que viabilizam a elaboração da justificativa formal apresentada. Observe que a elaboração da Figura 8 está fortemente relacionada com a representação da Figura 4, pois as representações seguem o mesmo padrão; contudo, a Figura 8 apresenta novos elementos formais, nas indicações genéricas dos pontos do plano, que estão associados a aspectos algorítmicos presentes na representação dos pontos da Figura 4.

Por outro lado, aspectos intuitivos relativos **à** visualização da Figura 8 estabelecem um conflito para Fernanda, que é explicitado quando destaca que "Eu acho que eu não tô provando nada, porque ele é isósceles". Acreditamos que a confusão da estudante, neste caso, está relacionada à discussão estabelecida inicialmente em torno das Figuras 1 e 2 e mostram ainda pouca clareza de Fernanda com relação ao processo de generalização que está desenvolvendo.

Esta perspectiva de confusão com o desenrolar do processo de generalização também fica evidenciada quando a estudante afirma que "Sei lá, porque tenho a impressão que tem muito x_1, x_2 e y_1, y_2 ... e tá meio confuso"; neste momento, aspectos algorítmicos do desenvolvimento algébrico não parecem claros para Fernanda, que mesmo assim segue com os cálculos. A sequência do desenvolvimento algébrico, contudo, traz uma ressignificação do processo e a destreza com que a estudante apresenta as Figuras 6 e 7 volta a ser marcante nos cálculos apresentados na Figura 10, evidenciando novamente uma boa interação entre aspectos algorítmicos e formais nesses desenvolvimentos.

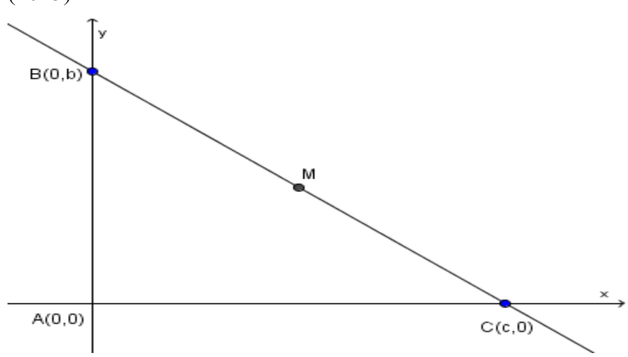
No diálogo que se segue aos cálculos da Figura 10, embora Fernanda mostre ainda alguma insegurança na resolução apresentada, entendemos que há uma evolução da estudante na compreensão do processo de generalização.

4 Conclusão

O fato de Fernanda ter construído o triângulo com um dos lados sobre o eixo , mas não ter representado os pontos deste lado com a coordenada indica que a estudante não tem total clareza sobre a generalidade do argumento que elabora. De fato, aspectos formais relativos à representação de um triângulo genérico ainda estão embotados por aspectos intuitivos numéricos presentes na Figura 4; além disso, entendemos que a discussão sobre essa construção tenha influenciado a demonstração que se segue à Figura 8 e o caráter genérico do novo argumento precisaria ser explorado em outras situações para que a estudante compreendesse a abrangência da demonstração construída. Os processos de mudança entre representações e de tradução, neste caso da Geometria para a Geometria Analítica, também deveria ser explorado com mais abrangência e detalhes, para que possam se tornar uma ferramenta de abordagem de problemas para a estudante.

Conforme destacamos anteriormente, propusemos uma estratégia de resolução para o problema apresentado à Fernanda, na qual colocamos a Figura 11 como referência de abordagem.

Figura 11 - Triângulo retângulo genérico proposto pelos autores (2015)



É interessante notar que, ao representar o triângulo retângulo dessa forma, realizamos um processo de abstração sofisticado, que passa pelo conhecimento de que a figura é construída de maneira particular, mas *sem perda de generalidade*, pois por meio de reflexões, translações e rotações, qualquer triângulo retângulo do plano pode ser reduzido à situação da Figura 11, sem que características como ângulos e distâncias sejam alteradas por estas operações, garantindo a generalidade da construção realizada.

Traçar um paralelo entre a solução pensada pelos autores e a apresentada pela estudante reitera o caráter construtivo do processo de generalização e o papel que a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais desempenha no desenvolvimento e na consolidação desse processo. De fato, o caminho percorrido por Fernanda, que a possibilita elaborar uma verificação formal do problema, é marcado pelo uso de processos de visualização, tradução e mudança entre representações, que exprimem como aspectos intuitivos, algorítmicos e formais se articulam para a estudante e como ela consegue ressignificar procedimentos e estratégias de resolução durante o desenvolvimento da intervenção.

Por outro lado, o desfecho da resolução do problema revela que a estudante ainda tem uma percepção limitada sobre o caráter geral do argumento construído, que é explicitado quando afirma “Pronto! Deu a mesma coisa? Deu a mesma coisa! Olha que lindo! Provei agora?” e na discussão sobre a notação dos pontos marcados sobre o eixo .

As dificuldades apresentadas pela estudante podem ser explicadas, em grande parte, pelo fato do ensino de Matemática na escola básica privilegiar abordagens que supervalorizam aspectos algorítmicos e intuitivos dos conceitos e ideias, em detrimento de aspectos formais que caracterizam, definem e justificam os resultados explorados.

A intervenção com Fernanda nos permite concluir que há potencialidades latentes para o desenvolvimento de aspectos formais, relativos aos conceitos e ideias, e de processos do Pensamento Matemático Avançado, como tradução, mudança entre representações e generalização, em aulas de Matemática da Educação Básica, mas que permanecerão silenciosos se não forem reiteradamente estimulados e trabalhados pelos docentes.

Temas como a resolução de equações por meio de gráficos de funções (Lima, 1999); a resolução funcional gráfica de inequações e a elaboração de gráficos de funções trigonométricas por meio do círculo trigonométrico são situações didáticas que podem favorecer a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais e o desenvolvimento de processos do Pensamento Matemático Avançado.

Referências

Carmo, P. F., & Igliori, S. B. C. (2017). Noções de pensamento matemático avançado utilizados em pesquisas na área de educação matemática. *Rev Prod Discente Educ Matem,* 6(1), p. 109-120.

Corbo, O. (2012). *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na educação básica*. (Tese de Doutorado, Universidade Bandeirante de São Paulo).

Costa, C. (2002). *Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização.* In: Encontro de Investigação em Educação Matemática SPCE – Grupo de trabalho 4 – O desenvolvimento do raciocínio matemático avançado.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall. *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Londres: Kluwer Academic Publisher.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? In M. Goos, M. (Org.). *Educational Studies in Mathematic*s (pp.491-512). Dordrecht: D. Reidel Publishing.

Fischbein, E. *Intuition in Science and Mathematics: an education approach.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1987.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R., Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann. *Didactics of mathematics as a scientific disciplin*e (pp.328-375). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Lima, R. N. (1999). *Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas.* (Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo).

Santos, A. T. C., & Bianchini, B. L. (2011). *O pensamento matemático avançado e o ensino de logaritmos.* In Conferência Interamericana de Educação Matemática, Comitê Interamericano de Educação Matemática.

Santos, A. T. C. (2013). F*unções exponenciais e logarítmicas: um estudo por meio de sequência didática.* In Encontro de Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM.

Szymanski, H. (2001). A entrevista reflexiva. *Rev Psicol Educ,11(12), p. 193-215.*

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In M. Goos, M. *Educational studies in Mathematics*. (pp.151-159). Dordrecht: D. Reidel Publishing.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall. *Advanced mathematical thinking.* (pp.3-21). Londres: Kluwer Academic Publisher.