CONHECIMENTO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO: UM ESTUDO COLABORATIVO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

Leticia Rangel [1]
Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro
Victor Giraldo [2]
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Nelson Maculan Filho[3]
Universidade Federal do Rio de Janeiro

RESUMO

Este trabalho tem como foco o desenvolvimento profissional do professor de matemática. Sob a premissa de que o conhecimento de matemática de um professor tem sua especificidade e que essa especificidade tem implicações diretas para a formação e para a prática do professor (DAVIS, SMMIT, 2006; EVEN, BALL, 2009; FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013), a investigação aqui apresentada visa contribuir para a reflexão sobre o conhecimento de matemática para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). O estudo tem como referência teórica e metodológica a noção de *concept study* (DAVIS, 2010, 2014), modelo de estudo coletivo em que professores compartilham de forma colaborativa sua experiência e seu conhecimento com o objetivo de questionar e (re)elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino. O conceito de número racional foi o tema disparador e orientador do estudo. Como conclusão, observa-se a contribuição de uma discussão colaborativa para o desenvolvimento de um metassaber do professor de matemática.

Palavras-Chave: Formação de Professores; Conhecimento de Matemática para o Ensino; Estudo Colaborativo; *Concept Study*; Números Racionais.

ABSTRACT

[1] leticiarangel@ufrj.br
[2] victor.giraldo@ufrj.br
[3] maculan@cos.ufrj.br

The focus of this paper is the professional development of mathematics teachers. Under the assumptions that teachers' mathematical knowledge has its own specificities and that these specificities have direct implications for teachers' education and practice (Davis, Smmit, 2006; Even, Ball, 2009; Fiorentini, Oliveira, 2013), this research aims to contribute with the reflection on mathematics knowledge for teaching (Ball, Thames, Phelps, 2008). The study's theoretical and methodological framework is grounded upon the notion of Concept Study (Davis, 2010, 2014), a model of collective study in which participant teachers share their experiences and knowledge aiming for challenging and (re)building their own mathematical knowledge for teaching. The concept of rational number was a trigger and guideline for the study. Our conclusions suggest that the collective discussion played a key role for the development of participants' metaknowledge.

Keywords: Teachers' Education; mathematics for teaching; collaborative study; concept study; rational number.

INTRODUÇÃO: O QUE É SABER MATEMÁTICA?

Para Kilpatrick (2008), a pergunta “o que é matemática?” admite diferentes respostas se a perspectiva de observação for a de um matemático ou a de um professor de matemática:

> A principal diferença entre matemáticos e educadores matemáticos está na forma como eles olham a matemática. Para o matemático, é claro: Matemática é um corpo de conhecimento e a disciplina acadêmica que estuda conceitos como quantidade, estrutura, espaço e mudança. [...] Educadores matemáticos veem a matemática não simplesmente como um corpo de conhecimento ou uma disciplina acadêmica, mas também como um campo de prática. Porque eles estão preocupados com a forma como a matemática é aprendida, compreendida e utilizada, tanto como com o que é, eles têm uma visão abrangente. (KILPATRICK, 2008, p.5, tradução nossa)

Fiorentini e Lorenzato (2009) afirmam que as práticas dos professores de matemática e dos matemáticos são distintas em muitos aspectos e os conhecimentos que estão na base da profissão de matemáticos e de professores de matemática podem não pertencer à mesma vertente epistemológica. Segundo esses autores, matemáticos tendem a conceber a matemática como um fim em si própria e a priorizar conteúdos formais e uma prática voltada para a pesquisa em matemática – promovendo, quando ensinam, a educação *para* a matemática. Educadores matemáticos, por outro lado, tendem a conceber a matemática como um meio ou um instrumento importante à formação intelectual e social da criança, dos jovens e dos adultos, determinado, assim, a perspectiva de uma educação *pela* matemática. Moreira e David (2007) entendem que:

> a formação matemática na licenciatura, ao adotar a perspectiva e os valores da Matemática Acadêmica, desconsidera importantes questões da prática docente escolar [...]. Diante disso, coloca-se claramente a necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da Matemática Científica e da Matemática Escolar nesse processo. (MOREIRA, DAVID, 2007, p.103)

O reconhecimento de que, dos pontos de vista do professor e do matemático, a matemática admite diferentes perspectivas, não implica no entendimento de uma separação entre a matemática escolar e a matemática como objeto de construção científica e acadêmica. Também não se trata de compreender a formação matemática de um professor como uma versão simplificada da matemática acadêmica. "**O conhecimento de matemática necessário para o ensino não é uma versão diluída da matemática formal.**" (DAVIS, SIMMT, 2006, p.295, grifo nosso).

A natureza e o desenvolvimento dos diversos saberes e conhecimentos necessários para o ensino na escola básica têm sido um foco importante da literatura de pesquisa nacional e internacional. Uma grande variedade de trabalhos tem procurado diagnosticar o conhecimento de matemática de professores e, em especial, fraquezas e deficiências desse conhecimento. Por outro lado, diversos pesquisadores têm assinalado a necessidade de direcionar o foco das pesquisas daquilo que os professores "não sabem" para como potencializar as experiências e os conhecimentos construídos por eles a partir da prática de sala de aula (e.g. BALL, THAMES, PHELPS, 2008; DOERR, 2004; RIBEIRO, 2012). É nesta perspectiva que a presente investigação se insere.

Com este trabalho, que é parte da pesquisa de doutorado da primeira autora sob a orientação do segundo e do terceiro autores, visamos contribuir com a reflexão acerca da formação do professor de matemática do ensino básico apresentando uma investigação com foco no desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino. A investigação tem como base a noção de *concept study* (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2014), metodologia de estudo coletivo em que professores compartilham sua experiência e seu conhecimento com o objetivo de questionar e (re)elaborar seu próprio conhecimento de matemática para o ensino. A constituição de grupos colaborativos, em que os professores tenham oportunidades de trocar impressões e experiências sobre sua própria prática, tem sido apontada como um tipo de atividade importante para a formação continuada articulada com a prática. Este é o caso, por exemplo, do *grupo de sábado*, relatado por Fiorentini e seus colaboradores (FIORENTINI, 2006, 2012, 2013; FIORENTINI et al, 2005). A investigação aqui apresentada se desenvolveu a partir da discussão e do estudo colaborativo de um grupo de professores de matemática em exercício na educação básica, em torno do tema "números racionais".

Na próxima seção, apresentamos uma breve revisão da literatura de pesquisa nacional e internacional sobre formação de professores e sobre o conhecimento de matemática para o ensino. Na seção 3, discutimos, em linhas gerais, a noção de *concept study*, referencial teórico e metodológico desta investigação. A quarta seção é dedicada às questões de pesquisa e ao contexto e aos procedimentos metodológicos da investigação. Nas seções seguintes, são apresentados os resultados da pesquisa, em cada uma das ênfases que determinaram o *concept study*: *Percepções*, *Panorama*, *Vínculos* e *Inferências*. Finalmente, na última seção deste artigo, traçamos algumas considerações finais e perspectivas de continuidade para a pesquisa em que se insere a experiência relatada.

A MATEMÁTICA ACADÊMICA E O CONHECIMENTO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Shulman (1986, 1987) critica a separação estrita entre o conhecimento de conteúdo e a pedagogia e propõe a noção de *conhecimento pedagógico de conteúdo*, um tipo especial de conhecimento próprio do professor que identifica um saber *sobre* o conteúdo *para* o ensino. Para Noddings (1992), essa expressão, mais do que um simples rótulo para um corpo real de conhecimento, reflete um “grito de guerra político”, que exige a investigação sobre a identidade desse conhecimento e de como ele se manifesta e interfere na prática do professor. Em particular, Noddings reconhece que o conhecimento de matemática de um professor tem sua especificidade e que essa especificidade tem implicações na prática e também na formação do professor:

> Conhecimento de matemática pode não ser suficiente para descrever o conhecimento profissional dos professores. O que um professor de matemática sabe que outra pessoa com formação matemática semelhante não sabe? Que conhecimento especializado tem um professor? [...] A pesquisa sobre o conhecimento do professor é crucial não só para a condução do ensino em si, mas também para a formação do professor. (NODDINGS, 1992, p.202, tradução nossa)

O “grito político” proclamado por Noddings denuncia a necessidade de se conceber a formação inicial e continuada de professores não como uma diluição da matemática formal (como observam DAVIS, SIMMT, 2006), mas tendo como fundamento sua epistemologia própria (como alertam FIORENTINI, LORENZATO, 2009), sob a perspectiva da construção de saberes *a partir da* prática e *para a* prática.

As estruturas dos cursos e das ações de formação profissional de professores devem reconhecer a prática como uma dimensão de produção de saberes docente (BALL, BASS, 2003; MOREIRA, 2004; EVEN, BALL, 2009; RIBEIRO, 2009; FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013). FIORENTINI e OLIVEIRA (2013) defendem que um movimento de mudança de modelos baseados no treinamento para modelos baseados na prática do professor refletem um mudança de percepção da aprendizagem da docência: *da metáfora da aquisição para a metáfora da participação*.

Segundo essa perspectiva, por sua própria natureza, a construção dos saberes necessários para o ensino de matemática não pode ser reduzida à formação inicial do professor. **A formação do professor, com especial atenção à construção de saberes docente, deve ser entendida como um processo permanente, que tem início no curso de graduação e se desenvolve continuamente ao longo da prática** – um processo que visa ao desenvolvimento do professor como profissional (SBEM, 2003; EVEN, BALL, 2009).

No entanto, a formação do professor, muitas vezes, parece ainda estar distante e desconectada do trabalho de ensinar matemática, ou seja, da prática dos professores (BALL, BASS, 2003).

A observação do distanciamento entre a formação do professor e a prática letiva no ensino básico não é recente. Há mais de um século, o matemático Felix Klein, em sua obra, hoje clássica, ***Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*** (KLEIN, 2009), já apontava uma ruptura entre a matemática escolar, aquela ensinada nos sistemas de ensino básico, e a matemática acadêmica universitária. Klein identifica essa ruptura como uma *dupla descontinuidade* na formação inicial do professor de matemática, que se estabelece na falta de conexão, por um lado, entre a matemática anteriormente aprendida na escola básica e a matemática estudada no curso universitário de formação de professores e, por outro lado, entre a matemática dos cursos universitários e aquela que será futuramente praticada em sala de aula.

Tendo como referência a observação da prática de sala de aula e as ideias de Shulman, Ball e seus colaboradores (BALL, BASS, 2003; BALL, THAMES, PHELPS, 2008) propõem um modelo para a composição dos saberes docentes dos professores de matemática, distinguindo, assim, a noção de ***conhecimento matemático para o ensino***.

> Por "conhecimento matemático para o ensino", queremos significar os conhecimentos matemáticos necessários para realizar o trabalho de ensino da matemática. É importante notar que a expressão termina com ensino, não com professores. Ela está preocupada com as tarefas envolvidas no ensino e com as exigências matemáticas dessas tarefas. (BALL, THAMES, PHELPS, 2008. p. 395, tradução nossa)

Para Ball e seus colaboradores,

> o ensino exige uma forma especializada de conhecimento de conteúdo puro – "puro" porque não é misturado com o conhecimento sobre os estudantes nem com o conhecimento de pedagogia e, portanto, distinto do conhecimento pedagógico do conteúdo identificado por Shulman e seus colegas e "especializado", porque não é necessário nem usado em outras configurações senão em ensino da matemática. (BALL, THAMES e PHELPS, 2008. p. 396, tradução nossa, aspas como no original)

Ball e seus colaboradores (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) propõem um modelo para os domínios do conhecimento de conteúdo para o ensino que se funda em subdivisões de duas das categorias propostas por Shulman (1986, 1987): *conhecimento de conteúdo* e *conhecimento pedagógico de conteúdo*. Nesse modelo, cada uma dessas categorias, fica subdividida em três:

- o conhecimento de conteúdo subdivide-se em: *conhecimento especializado do conteúdo* (SCK, do original: *Specialized Content Knowledge*), *conhecimento comum do conteúdo* (CCK, do original: *Common Content Knowledge*) e *conhecimento de horizonte do conteúdo* (HCK, do original: *Horizon Content Knowledge*) e
- o conhecimento pedagógico de conteúdo se divide em: *conhecimento do conteúdo e do ensino* (KCT, do original *Knowledge of Content and Teaching*); *conhecimento do conteúdo e dos alunos* (KCS, do original *Knowledge of Content and Students*) e *conhecimento do conteúdo e do currículo* (KCC, do original *Knowledge of Content and Curriculum*) (Figura 1).

O modelo proposto por Ball e seus colaboradores destaca a complexidade do conhecimento de matemática para o ensino. As categorias distinguidas devem ser entendidas como partes essenciais de um todo, sem que seja necessário determinar fronteiras precisas entre elas. O objetivo não é estabelecer uma taxonomia nem um conjunto de categorias estanques, nas quais seja possível classificar cada aspecto do conhecimento do professor, mas reconhecer que, isoladamente, nenhuma delas sustenta o saber necessário para o ensino.

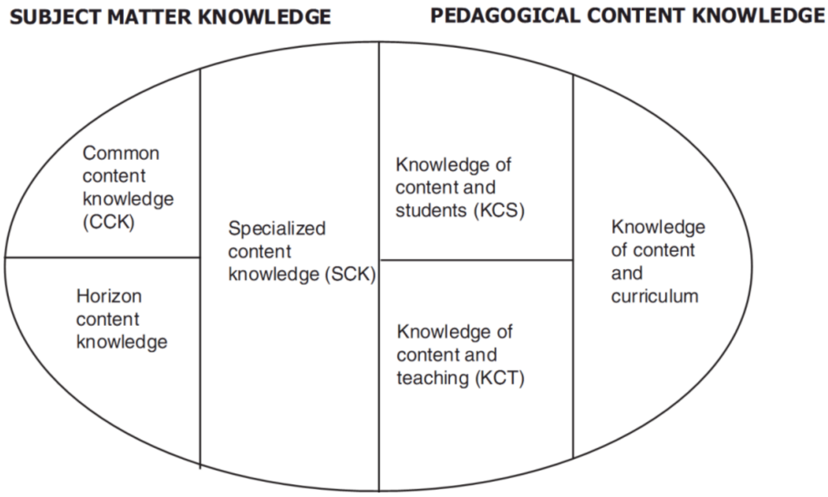

Figura 1: *Mathematical knowledge for teaching* (Ball, Thames, Phelps, 2008, p. 403)

Silverman e Thompson (2008) reconhecem pioneirismo no trabalho de Ball e seus colaboradores, por investigarem os saberes necessários ao professor de matemática a partir da observação das demandas reais na prática de sala de aula, mas destacam a importância da investigação no sentido da melhor compreensão desse saber e sobre como ele se desenvolve:

> Ball e seus colegas se concentraram em formas especiais que os professores devem saber a matemática, que são visíveis durante o processo de instrução, tais como representações criadas durante a realização de um cálculo e questões associadas com definições básicas de termos. Seu foco é na forma com que os professores lidam com esta matemática visível (durante o processo de instrução), que são sensíveis para o entendimento dos alunos. Concordamos que este foco é essencial para identificar e partilhar as melhores práticas de ensino. Mas também questionamos, “Que entendimentos matemáticos permitem ao professor agir dessa maneira espontaneamente? Como esses entendimentos podem ser desenvolvidos?” (SILVERMAN, THOMPSON, 2008, p. 500, tradução nossa, aspas como no original)

A compreensão sobre as formas como os saberes necessários para o ensino se desenvolvem e sobre o desenho de estratégias para que estes sejam apropriados pelos professores constituem questões que têm mobilizado a pesquisa recente em Educação Matemática, tanto no cenário brasileiro como no internacional (e.g., EVEN, BALL, 2009; FIORENTINI, LORENZATO, 2009).

REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO: A NOÇÃO DE CONCEPT STUDY

Nos últimos anos, no Brasil, tem-se investido fortemente em iniciativas de formação continuada, voltadas para professores de matemática em exercício na educação básica. Entretanto, em muitos casos, tais iniciativas limitam-se a revisões do conteúdo matemático, apresentados essencialmente com a mesma abordagem dos cursos de graduação, estabelecendo poucas conexões com a prática. Essas iniciativas parecem supor que os professores que constituem seu público não têm qualquer conhecimento sobre os conteúdos da matemática escolar, ignorando o fato de que estes *estão em sala de aula*, e que trazem saberes de conteúdo matemático para o ensino que vêm da própria experiência da prática.

A literatura de pesquisa em formação de professores sugere que a construção dos saberes necessários para a atuação profissional de professores na educação básica, por sua própria natureza, não pode se esgotar no curso de graduação, se prolongando de forma permanente ao longo da prática (EVEN, BALL, 2009; FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013). Ações de formação continuada, voltadas para a construção de saberes por professores em exercício, não podem deixar de levar em conta o fato de o seu público se constituir de professores que atuam em sala de aula, com experiências e com os saberes construídos a partir e ao longo da prática. Tais ações devem ser planejadas de forma a promover a necessária integração entre a matemática acadêmica e os saberes de conteúdo matemático que emergem da prática.

Concebida a partir do entendimento de que o conhecimento de matemática do professor é tão extenso e tão dinâmico que não pode ser abarcado em um conjunto de recursos ou comprimido em período de estudo, a noção de *concept study*, proposta por Davis e seus colaboradores (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2014), oferece uma alternativa para os modelos de formação de professores de matemática em exercício. A estrutura de um *concept study* se organiza por meio de grupos de professores envolvidos em um estudo colaborativo, no qual seus conhecimentos e suas experiências são compartilhados em uma discussão coletiva, visando à reflexão sobre o conhecimento de matemática para o ensino.

Para Fiorentini e seus colaboradores (FIORENTINI et al., 2005; FIORENTINI, 2006), a experiência de aprendizagem colaborativa contribui positivamente para o desenvolvimento profissional do professor:

> o trabalho colaborativo, mediado pela reflexão e investigação sobre a própria prática, é uma estratégia poderosa de educação contínua de professores, pois o professor, frente aos desafios diários, busca, continuamente, com o grupo, novos saberes e arrisca-se em novas experiências docentes, re-significando permanentemente sua prática e seus saberes. [...] O professor não apenas acompanha e recebe novos conhecimentos e ideias, mas, também troca e contribui, tornando-se protagonista da cultura profissional de seu campo de trabalho. (FIORENTINI, 2006, p. 34)

A noção de *concept study* (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2014) se configura em uma metodologia de estudo que expõe de forma reflexiva o conhecimento de conteúdo do professor, sem perder de vista a sua dimensão pedagógica. Essa metodologia se caracteriza a partir de um estudo coletivo em que professores compartilham de forma colaborativa sua experiência e seu conhecimento com o objetivo de questionar e (re)elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino. Assim, um *concept study* se desenvolve a partir da identificação, da interpretação, do questionamento, da proposição e da elaboração de imagens, metáforas, analogias, exemplos, exercícios, e aplicações que são evocadas (explicita ou implicitamente) sobre um determinado tópico de matemática analisado sob as perspectivas do ensino e da aprendizagem.

A concepção de *concept study* se estabelece a partir da articulação de duas noções importantes na pesquisa em educação matemática: (i) *Concept Analysis* (USISKIN et al, 2003) – com foco na explicação de estruturas lógicas e associações que são inerentes a conceitos matemáticos e (ii) *Lesson Study* (FERNANDEZ, YOSHIDA, 2004) – estrutura colaborativa em que professores se empenham em melhorar a qualidade de sua prática. Segundo Davis e seus colaboradores, um *concept study* permite uma (re)construção conceitual estabelecida a partir de um conhecimento já formado. Esse processo é identificado pelos autores como **"*substruct*" – processo de reconstrução conceitual em que professores reelaboram conceitos matemáticos, às vezes radicalmente, enquanto continuam a utilizá-los, quase que sem interrupção, no ensino** (DAVIS, 2010; DAVIS, Renert, 2014).

> *Substructing* é derivado do latim *sub-,* “debaixo, abaixo” e *struere,* “pilha, montagem” (e a raiz de *espargir* e *interpretar,* além de *estrutura* e *construção). Substruct* se refere a construir debaixo de alguma coisa. Na indústria, *substruct* refere-se à reconstrução de um prédio sem demoli-lo – e, de preferência, sem interromper o seu uso. Da mesma forma, em *concept studies*, professores reelaboram conceitos matemáticos, às vezes radicalmente, enquanto continuam a utilizá-los, quase que sem interrupção, no ensino. (DAVIS, 2012, p.6, itálico como no original, tradução nossa)

Assim, observando o processo identificado por “substruct”, um *concept study* põe em destaque e permite o acesso à profundidade e à amplitude de conhecimento dos professores sobre conceitos matemáticos.

Para Ball e Bass, “oportunidades de os professores aprenderem matemática devem incluir experiências de descompactar ideias, procedimento e princípios matemáticos familiares” (BALL, BASS, 2003, p.13, tradução nossa). No trabalho de Ball e seus colaboradores, a investigação desse processo está fortemente ancorada na observação da prática do professor em atuação em sala de aula.

> Ao analisar as demandas matemáticas do ensino, buscamos identificar o conhecimento matemático que é exigido pelo trabalho realizado pelos professores em sua prática. Nesse sentido, definimos o conhecimento matemático que estamos estudando como conhecimento matemático "implicado pelo ensino", em outras palavras, *o conhecimento matemático necessário para executar as tarefas recorrentes de ensinar matemática.* (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p.399, tradução nossa, aspas e itálico como no original)

Davis e Renert (2014) entendem que, de certa forma, em um *concept study* também se desenvolve a atividade de “descompactar” conhecimento, como descrito por Ball e Bass (2003), especialmente quando os professores elaboram uma lista de metáforas, analogias e imagens que têm associadas a um conceito. No entanto, acreditam também que um *concept study* vai além, na medida em que permite *desmontar* e *reconstruir* o conhecimento – o que caracteriza o processo que identificam como *substruct.* Para Davis e Renert, “relativamente pouco do trabalho de *substructing* é memória. Pelo contrário, é mais sobre reinterpretação, sobre reconfiguração e sobre “ressaber” o que se presume ser já conhecido.” (DAVIS, RENERT, 2014, p.43, tradução nossa, aspas e itálico nossos). Essa (re)construção conceitual que marca um *concept study* não prescinde da prática do professor. Em um *concept study*, a prática se faz presente na própria reflexão do professor, que traz reunidos conhecimentos e experiências acumulados.

A análise de um *concept study* tem caráter interpretativo e prevê a identificação de ênfases no seu desenvolvimento. Essas ênfases contemplam, de forma gradativa e encadeada a reflexão realizada pelo grupo. Segundo Davis e Renert (2014), apenas a primeira ênfase pode ser descrita como intencional, as demais são emergentes do próprio estudo colaborativo, imprevisíveis, não planejados, decorrentes de interesses comuns, conhecimentos divergentes e encontros acidentais. A primeira ênfase, *percepções,* é caracterizada pela elaboração de uma lista que reúne as diversas imagens, metáforas, impressões que emergem da reflexão coletiva determinada a partir de um tema central e de uma questão disparadora. Assim, os itens que compõem a lista emergem da experiência docente dos participantes, e podem refletir seus valores, suas expectativas ou suas inseguranças com respeito aos conteúdos da matemática escolar. As ênfases subsequentes se desenvolvem a partir da observação de relações e de conexões entre as *percepções* listadas na primeira ênfase do estudo.

O ESTUDO

A investigação aqui apresentada tem como objetivo estabelecer o foco sobre o conhecimento de matemática para o ensino com iluminação especial ao conteúdo, sob o entendimento de um metassaber do professor. Não se pretende observar o conhecimento de conteúdo do professor em sua dimensão pedagógica, evidenciado em uma aula ou em uma experiência didática. Também não se constitui em um propósito deste trabalho identificar o que os professores revelam sobre o conhecimento de um determinado assunto a partir da observação de erros, acertos ou estratégias de resolução de uma ou de algumas questões específicas. Entendendo a relação entre a matemática escolar e a matemática acadêmica a partir da concepção de uma *translação histórica* (SCHUBRING, 2014), que admite um processo de *elementarização*, pretende-se que a investigação reflita a observação do conteúdo exatamente como sugerido por Klein (KLEIN, 2009; SCHUBRING, 2014), sob uma visão panorâmica que permita a observação de conexões e articulações entre assuntos e campos diversos da matemática. Por outro lado, o conhecimento de matemática para o ensino se caracteriza como um conhecimento *sobre* conteúdo *para* o ensino, isto é, como um conjunto de conhecimentos sobre o conteúdo, que capacita o professor para o ensino.

O foco desta investigação está na potencialidade de estudos colaborativos envolvendo grupos de professores de matemática para a construção do conhecimento matemático para o ensino. Mais especificamente a questão de pesquisa central que orienta este trabalho é como e até que ponto um estudo coletivo, estruturado de acordo com a metodologia de *concept study*, proposta por Davis e seus colaboradores (DAVIS, 2010; DAVIS, RENERT, 2014), pode contribuir para: (1) o reconhecimento de aspectos elementares da matemática escolar; (2) a identificação, por parte dos professores, de metassaberes sobre os conteúdos da matemática escolar; (3) a (re)construção do conhecimento de matemática para ensino a partir desses aspectos elementares e metassaberes. Para investigar estas questões, o *concept study* realizado neste trabalho teve como tema central *números racionais*. Esse tema foi escolhido por incorporar diversos aspectos (tais como representações e operações) comumente reconhecidos por professores por envolverem obstáculos de aprendizagem e dificuldades com metodologias de ensino. Sendo assim, para este estudo, o modelo de *concept study* constitui tanto um referencial teórico, na medida em que sustenta as questões de pesquisa, como metodológico, pois determina os métodos para investigá-las.

O estudo coletivo se deu com um grupo de professores que cursou, no segundo semestre de 2012, a disciplina eletiva Tópicos em Ensino de Matemática do curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM-UFRJ). Como essa disciplina é eletiva, tem ementa que acolhe o desenvolvimento do estudo realizado. É uma disciplina com carga horária de 4 horas semanais e, em 2012, se desenvolveu durante 14 encontros. O grupo de participantes do estudo era composto por 6 professores com experiência profissional que variava de 1 (um) a pouco mais do que 6 (seis) anos de atuação em sala de aula. Neste trabalho, nos referiremos a esses participantes pelos pseudônimos: Alexandre, Bernardo, Catarina, Débora, Ernesto e Flávio. Em relação ao campo de atuação profissional, na ocasião do desenvolvimento do estudo, 4 atuavam em escolas públicas da rede estadual do Rio de Janeiro e/ou da rede municipal da cidade do Rio de Janeiro e 2 apenas em escolas particulares. No entanto, todos eram responsáveis por turmas do 2º segmento do ensino fundamental.

Inicialmente, foram realizadas entrevistas semiestruturadas que tiveram como objetivo principal conhecer melhor o *background* acadêmico e profissional dos professores participantes e suas percepções sobre a sua relação com a prática e com seus próprios saberes docentes. A análise dessas entrevistas revelou que esses professores tinham o entendimento pessoal de que a formação acadêmica de graduação deixa lacunas importantes e que essas lacunas têm reflexos para a prática de sala de aula. Em particular, as referências de conhecimento matemático em que os professores participantes sustentavam sua prática pareciam estar muito mais direcionadas para o que eles haviam aprendido quando alunos da escola básica do que no curso de graduação – como se a Licenciatura tivesse desempenado um papel efetivamente inócuo em sua formação. Por exemplo, a professora Catarina, que cursou disciplinas de geometria em sua formação acadêmica, revelou se sentir insegura para ensinar o assunto por não ter estudado geometria quando era aluna da educação básica, reconhecendo que a falta de referência desse conteúdo em relação a aquela etapa do ensino era determinante para a sua prática. De maneira geral, os professores entrevistados revelaram, de alguma forma, que a sua formação acadêmica não foi suficiente para que se sentissem adequadamente preparados e instrumentalizados para usar seus conhecimentos para ensinar matemática. Desta forma, a análise das entrevistas iniciais revelou que os professores participantes reconheciam a necessidade de um *conhecimento de matemática para o ensino*, apontou a *dupla descontinuidade* (KLEIN, 2009) e ressaltou o reconhecimento da valorização da formação continuada, corroborada pela opção por um curso de especialização.

Os dados do estudo foram coletados por meio de gravações em áudio e em vídeo das sessões, anotações de campo, por parte da pesquisadora, sobre o desenvolvimento das sessões e registros documentais de atividades diversas estabelecidas a partir da discussão, pelo grupo ou pela pesquisadora. Segundo a metodologia de análise de um *concept study*, neste estudo foram distinguidas quatro ênfases: *Percepções*, *Panorama*, *Vínculos* e *Inferências*. Na ênfase *Percepções*, a questão disparadora foi: ***O que é fundamental no que ensinamos sobre números***

racionais na escola básica? As ênfases subsequentes foram determinadas e distinguidas a partir da qualidade e da complexidade das relações estabelecidas pelos participantes entre diferentes aspectos do tema central (números racionais) e entre esse e outros assuntos e ramos da Matemática. Em particular, como essas ênfases são caracterizadas *pela qualidade da discussão coletiva*, as mesmas não correspondem a intervalos de tempo bem definidos e ordenados. Embora se verifique uma linearidade cronológica entre o início de cada ênfase, a partir daí elas podem se sobrepor e se articular de forma não linear nem escalonada. A dinâmica da relação entre as ênfases identificadas no estudo pode ser melhor percebida a partir da metáfora visual apresentada na Figura 2.

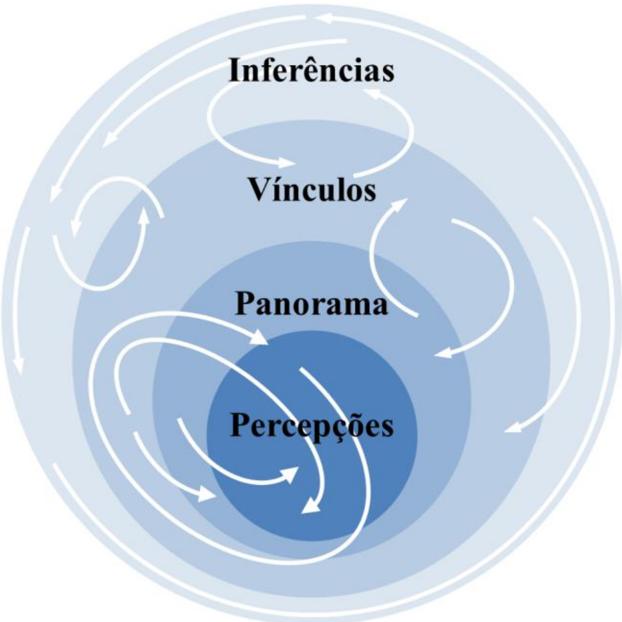

Figura 2: Metáfora visual para a dinâmica da relação entre as ênfases do *concept study.*

PERCEPÇÕES

A composição da lista de *percepções*, que marca de forma intencional o início do estudo, foi estabelecida a partir de uma longa discussão do grupo. Como em um estudo anterior (RANGEL, GIRALDO e MACULAN, 2014), também neste caso a discussão entre os participantes deixou evidente que para compor a lista *percepções*, os professores se pautaram tanto no contexto da sala de aula, em sua prática, como na identificação da relevância do tema para a matemática. A discussão inicial do grupo foi pautada na identificação de tópicos a partir de conexões e de relações com o tema central, que podem ser representadas como um diagrama (Figura 3). O amadurecimento da discussão nesta ênfase levou os professores participantes à lista de percepções em sua forma final (Figura 4).

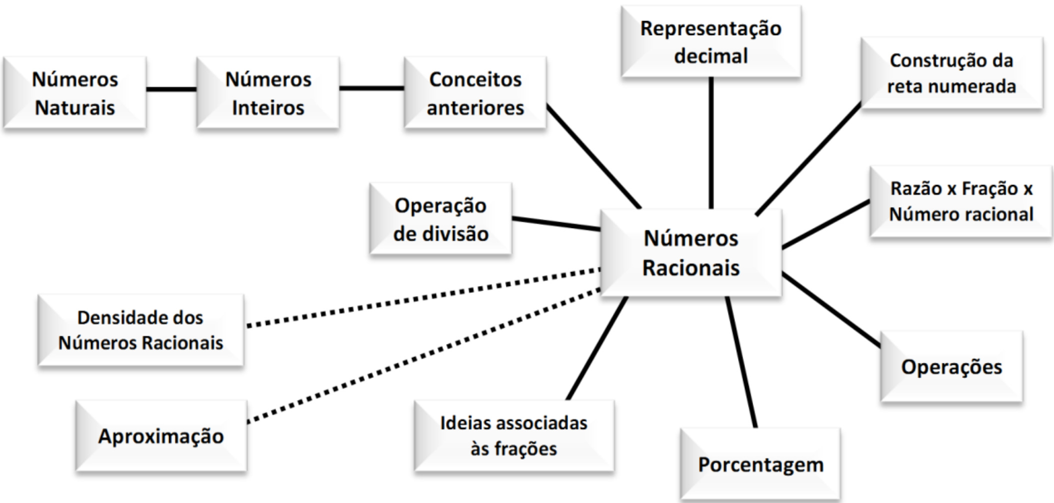

Figura 3: Diagrama ilustrativo da discussão da 1ª versão da lista *Percepções*.

- História (*)
- Conceito de medida
- Unidade → *Qual é a unidade?* e *O que unidade?*
- Conceitos anteriores → Números Naturais e Números inteiros ←p/q (na definição)
- Representação desses números:
  - Decimal → aplicação prática: dinheiro
  - Fracionária
  - Gráfica
  - Finito/exato ou infinito, dízima
  - Número misto
- Relacionar as várias representações
- Compreender décimos, centésimos e milésimos
- Construção da reta numerada ← Construção dos Números (até reais)
- Conceito do que é divisão → A compreensão da operação de divisão é fundamental para a compreensão, por exemplo, da representação decimal.
- Fração x Razão x Números racionais (*)
- Frações equivalentes, simplificação de frações e frações irredutíveis
- Comparação e ordenação
- Inexistência de sucessor/antecessor → Densidade dos racionais → infinito (*)
- Operações → Forma decimal e forma fracionária
- Inverso multiplicativo
- Ideias associadas às frações → parte/todo, quociente, razão e operador (PCN)
- Porcentagem → Atrelada ao conceito de fração
- Abordar as frações em universos discretos e em universos contínuos

(*) – Não são tópicos relativos diretamente à escola básica.

Figura 4: Quadro final de percepções.

A preocupação com o ensino se fez presente na discussão sobre a inclusão de cada um dos pontos componentes da lista final, direta ou indiretamente. Por exemplo, a discussão sobre o item *comparação de números racionais*, que foi consenso como assunto típico do ensino de números racionais no ensino básico, determinou também a discussão e a decisão pela inclusão do tópico *densidade dos números racionais* na lista de percepções elaborada pelo grupo. Durante uma discussão sobre a comparação de números racionais, o professor Flávio compartilhou com os demais a seguinte reflexão: "*O que vem antes de comparar é a ideia do que vem antes e do que vem depois. As ideias de sucessor e de antecessor*". Na discussão que se seguiu a essa observação, os professores participantes distinguiram as ideias de "vir antes" e de “vir depois” dos conceitos de antecessor e de sucessor. A professora Débora ponderou: “*Nos racionais, eu sei o que vem antes de 1/2, por exemplo, mas não sei o antecessor de 1/2. O antecessor é o que vem imediatamente antes e o imediatamente antes, nos racionais, não tem*”. Nesta etapa da discussão não evidenciaram a identificação de antecessor e de sucessor como conceitos próprios dos números naturais. A íntegra da discussão realizada entre os participantes resultou na inclusão do tópico “Não existência de antecessor e de sucessor → densidade dos racionais → infinito”. Assim, revelaram, por exemplo, o entendimento de que, ainda que na educação básica a formalização da densidade dos números racionais não seja um objetivo, é necessário que esse conceito seja problematizado no ensino de números racionais e que, portanto, deve ser um conhecimento do professor.

> Professora Débora: Essa lista não precisa conter só coisas que a gente precisa ensinar. Tem que ter coisas que a gente precisa saber (como professor).

Esse entendimento caracterizou a composição da lista e, da mesma forma, toda a discussão que se seguiu.

PANORAMA

A ênfase *panorama* ficou caracterizada pela *articulação de aspectos matemáticos elementares do conceito de número racional que têm característica estruturante na compreensão do próprio tema*. Nesse sentido, destacam-se, por exemplo, questionamentos sobre *representação*, sobre *equivalência* e *igualdade* no âmbito das frações e a reflexão sobre as *operações envolvendo números racionais*.

Um episódio ilustrativo desta etapa envolveu a reflexão sobre algoritmos para a divisão de números racionais em sua forma decimal. Motivados pela reflexão proposta pela professora Catarina, sobre como ensinar o cálculo $2{,}49 \div 0{,}3$, os professores participantes do estudo exercitaram diferentes estratégias de cálculo, amparadas pela discussão dos aspectos conceituais envolvidos em cada um dos procedimentos experimentados, sem perder de vista a dimensão do ensino. Por exemplo, os processos ilustrados na Figura 5, registram duas formas diferentes (e pouco usuais no ensino básico) de desenvolver esse cálculo pelo processo da divisão por estimativa:

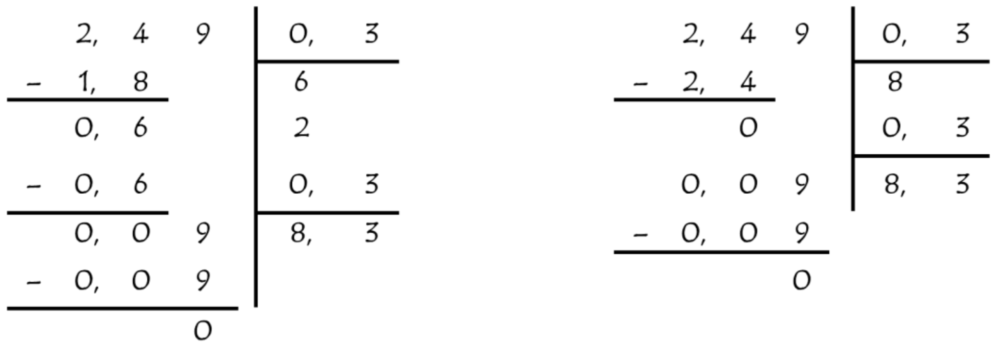

Figura 5: Procedimentos para o cálculo da divisão de 2,49 por 0,3.

A discussão sobre esses processos ateve-se especialmente no resultado da divisão de 0,09 por 0,3. Refletir sobre o fato de que 0,3 não “cabe” uma quantidade inteira de vezes em 0,09 foi um exercício novo para os professores participantes. Até então, costumavam realizar (e ensinar) esse cálculo apenas a partir de uma regra, que envolve “igualar as casas decimais e eliminar a vírgula”, ou seja, operar apenas com números inteiros. Assim, realizavam o cálculo “9 dividido por 30”, equivalente a “0,09 dividido por 0,3”. Para sustentar a discussão sobre a divisão de 0,09 por 0,3, os professores recorreram a uma representação pictórica (Figura 6), o que permitiu levar o grupo a refletir sobre o potencial pedagógico da diversidade de representações.

Claro que é possível chegar ao resultado do cálculo 0,09 dividido por 0,3 pela observação de que $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$. No entanto, no momento em que essa discussão mobilizou o grupo, o foco era a compreensão da divisão como medida, que é intrínseca à própria compreensão do conceito de número racional. Nesse momento, não estava em questão a compreensão da divisão como operação inversa da multiplicação, própria também do universo dos números racionais.

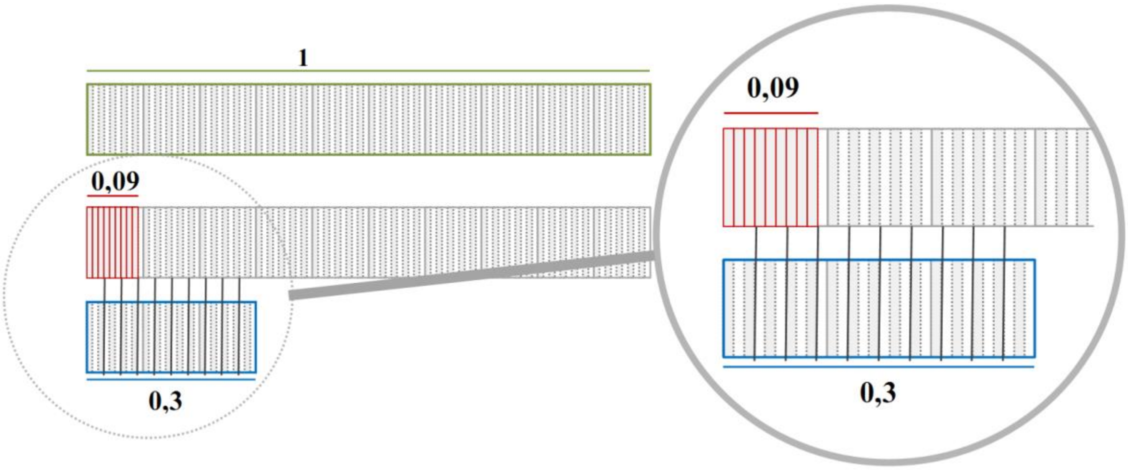

Figura 6: Modelo pictórico para a representação da divisão de 0,09 por 0,3

VÍNCULOS

A terceira ênfase identificada neste estudo, *vínculos*, ficou caracterizada especialmente a partir das *conexões matemáticas estabelecidas, ampliadas em alcance e em complexidade, não se limitando ao contexto de números racionais*.

Por exemplo, a discussão alcançou a reflexão sobre a relação dos números racionais com grandezas incomensuráveis e com a construção dos números reais. Um exercício importante como elemento disparador desta etapa foi a demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado. Alguns dos professores participantes fizeram essa demonstração pela primeira vez no curso. Em particular, esse nível da discussão marcou uma mudança significativa de paradigma para o grupo: **o reconhecimento de que o conhecimento de matemática do professor para o ensino não pode ser reduzido ao conteúdo explicitado em livros didáticos**. A partir desse momento, as referências que amparam o estudo coletivo exigiram a consulta exclusiva a textos acadêmicos. Esse ponto de inflexão foi associado a evidências na discussão realizada de um reconhecimento, por parte dos professores participantes, de que os assuntos ensinados no ensino básico, ainda que exijam uma abordagem própria para esse nível de escolaridade, precisam ser compreendidos de uma perspectiva mais ampla.

INFERÊNCIAS

Esta ênfase é predominantemente marcada pela *mudança de atitude dos professores participantes*. O aspecto mais relevante de caracterização da discussão que marca esta etapa do estudo está na *problematização de certezas*. Nesta etapa, os professores participantes passaram a buscar confirmar a origem e a fundamentação das certezas que compunham o seu conhecimento de matemática sem perder de vista a perspectiva do ensino. Assim, por exemplo, questionaram certezas anteriores, tais como: 0,999... (dízima de período 9) é igual a 1; todo número racional admite duas representações, na forma de fração e na forma de expansão decimal; e todo número racional é uma dízima periódica. Os professores participantes reconheceram que algumas dessas certezas foram constituídas durante seus próprios estudos no ensino básico e não na formação universitária. Segundo nossa análise dos resultados do estudo, essa constatação foi associada à indicação da dupla descontinuidade identificada por Klein (2009). Nesta etapa do estudo, a reflexão do grupo passou a contemplar naturalmente duas indagações: *O que garante esse resultado? Como ele deve ser tratado na sala de aula?* Ficava assim evidenciada uma nova forma de percepção dos professores participantes sobre o seu conhecimento de matemática para o ensino: **não basta saber, é necessário compreender como esse saber se constitui, qual sua natureza e sua origem, bem como compreender em que sentido e em que medida esse saber é relevante para a sala de aula**. Em nossa análise identificamos esta perspectiva como um processo de construção de metassaberes pelos professores participantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como primeiro resultado do desenvolvimento do estudo coletivo, destaca-se o **potencial da metodologia *concept study* para investigar o conhecimento de matemática dos professores de forma articulada com a sua prática, deixando em evidência aspectos implícitos e explícitos do conhecimento pedagógico de conteúdo e do conhecimento de conteúdo dos professores**. Em particular, em um *concept study* os professores participantes têm um duplo papel: como agentes e como objetos da investigação, sendo em ambos os casos protagonistas de um processo colaborativo de reflexão sobre os saberes docente. De acordo com nossa análise, este aspecto desencadeia o desenvolvimento de um metassaber por parte dos professores. Os participantes se envolveram na discussão sobre o conteúdo matemático, com base em suas experiências, incertezas e expectativas em relação ao ensino, investigando assim, os seus conhecimentos e práticas a partir da reflexão sobre esses próprios conhecimentos e práticas. Portanto, em um *concept study*, o conhecimento matemático para o ensino e as práticas dos professores têm papel fundamental, se configurando em *origem* e em *fim* do estudo.

Não foi objetivo da investigação realizada, determinar o que os professores *sabem* ou *não sabem*, isto é, mapear o que revelam sobre o conhecimento de um determinado tópico a partir da observação de erros, acertos ou estratégias de resolução de uma ou de algumas questões específicas. O foco do trabalho está na observação de conexões e articulações entre assuntos e campos diversos da matemática em um modelo de estudo colaborativo que visa ao desenvolvimento profissional do professor e à (re)construção de seu conhecimento de matemático para o ensino. A análise do estudo revela que o processo de discussão levou ao aprofundamento de questões conceituais *elementares* sobre o tema, números racionais, a articulações com outros tópicos da matemática. Por exemplo, inicialmente, ainda no início da ênfase percepções, o grupo estabeleceu uma órbita de assuntos elementares em torno de números racionais que identificava quase que direta e exclusivamente assuntos próprios do ensino básico (Figura 4). A reflexão coletiva propiciou ainda o desenvolvimento de novas formas de compreender e dimensionar a importância dos próprios conhecimentos de matemática para a prática de sala de aula – isto é, o desenvolvimento de novos *metassaberes*.

Reconhecendo aspectos elementares

Neste estudo, não *associamos aspectos* elementares a uma visão da matemática que seja em algum sentido platônica, ou que pressuponha alguma estrutura estática dada a priori, da qual os professores devam se apropriar. Entendemos esses aspectos como inerentes ao conhecimento e às concepções de matemática de cada professor. Não buscamos, portanto, determinar um mapa absoluto de aspectos elementares que possa ser generalizado. Procuramos entender o papel de aspectos elementares na estruturação e na reconstrução do conhecimento de matemática para o ensino dos participantes, decorrente da reflexão coletiva e da troca de experiências pelo grupo.

A reflexão coletiva levou grupo a ampliar seus questionamentos de maneira a aprofundar o conhecimento próprio de números racionais, como no caso da operação de divisão envolvendo números racionais ou no caso da existência de inverso multiplicativo. A reflexão sobre a existência de inverso multiplicativo leva, por exemplo, à reflexão sobre o conjunto Q, munido de uma estrutura algébrica, constituir um corpo. Esse nível de distanciamento e aprofundamento foi associado à segunda ênfase identificada no estudo, *panorama*. Observa-se que, já nesta fase, as articulações oscilam em relação a estarem mais aproximadas de questões naturalmente ligadas ao ensino básico e a assuntos próprios do ensino superior. O desenrolar do estudo, levou o grupo à ampliação de conexões, alcançando outros assuntos. Por exemplo, a noção de infinito. Os números racionais encerram um conceito de infinito que é diferente daquele associado a não limitação própria dos números naturais. Os racionais trazem como estrutura elementar a densidade, que está associada a uma concepção de infinito em um intervalo limitado. A reflexão realizada pelos professores participantes vai além, as conexões estabelecidas alcançam questões próprias dos números reais, que não constituíam o objeto conceitual inicial do estudo. Esse nível de articulação e distanciamento do tema original do estudo é associado à terceira ênfase identificada no estudo, *vínculos*.

Identificando metassaberes

Entendemos que a dinâmica de discussão colaborativa observada no estudo realizado evidencia um processo de descompactação do conhecimento de matemática dos professores participantes (BALL, BASS, 2003; DAVIS, RENERT, 2014). Esse processo aponta para uma percepção da matemática ampliada em aprofundamento e em articulações, o que, em nossa análise, consonantes com o entendimento de Klein (2009) e de Ball e Bass (2003), colabora para o conhecimento de matemática do professor para o ensino. Sobretudo, esse processo evidencia a percepção, pelos professores participantes, da importância, para a prática de sala de aula, dos próprios conhecimentos de matemática e da qualidade desses conhecimentos. Por exemplo, ficou claro que, a partir da experiência, o grupo passou a compartilhar uma visão de que o simples conhecimento substantivo sobre os tópicos da matemática escolar não era suficiente para prepará-los para o ensino. Era necessário, além disso, entender esses tópicos de uma perspectiva bem mais ampla. Em nossa análise, associamos essas perecepções dos professores praticipantes a identificação de metassaberes.

(Re)construindo o conhecimento de matemática para ensino

O estudo realizado sugere também que o exercício colaborativo de questionar e investigar a matemática, a partir da reflexão sobre um tema central reconhecidamente importante na educação básica de matemática e em busca de conexões entre conceitos e estruturas matemáticas elementares, proporcionou, de fato, uma reconstrução individual do saber de matemática para o ensino de cada professor participante. Essa reflexão tem um caminho diferente daquele tradicionalmente praticado na formação docente: não parte da proposição direta de um professor formador, mas da reflexão e dos questionamentos dos próprios participantes em uma configuração colaborativa, sem perder de vista questões próprias da prática de sala de aula. Ou seja, a experiência de compartilhar coletivamente o conhecimento, os questionamentos e as experiências individuais desencadeia a (re)construção do próprio conhecimento individual de forma conectada com a prática – *substruct* (DAVIS, 2010, DAVIS, RENERT, 2014). Por exemplo, pessoalmente, nenhum dos professores participantes do estudo demonstrou dificuldades para efetuar a divisão evolvendo números racionais, revelando, assim, um *saber comum sobre o conteúdo* (segundo o modelo de Ball e seus colaboradores). Era esse conhecimento que tinham como base para ensinar o assunto. Reconhecer a compreensão da divisão como medida como uma condição necessária para a efetiva aprendizagem dessa operação no contexto dos racionais foi um conhecimento que emergiu da discussão colaborativa entre os professores participantes. Mais ainda, a reflexão conduzida levou à exploração e ao reconhecimento, pelo grupo de professores participantes, de que modelos pictóricos podem constituir um recurso didático importante para a aprendizagem desse conteúdo. Em nossa interpretação, esse episódio significou, para os professores participantes, uma (re)construção conceitual que, mais do que ampliar seu conhecimento comum de conteúdo, alcançou o seu conhecimento especializado de conteúdo.

O estudo evidenciou ainda uma mudança na relação dos professores participantes com o seu conhecimento de matemática para o ensino. Por um lado, os participantes mostraram perceber que esse conhecimento deve ultrapassar o conhecimento dos tópicos do ensino básico, alcançando uma perpectiva mais panorâmica desses conteúdos em relação à própria matemática. Por outro lado, reconheciam que uma formação acadêmica desconectada da prática do professor pode ser inócua para tarefa de ensinar. Na análise dos dados coletados, ficou evidente que os professores participantes reconheceram que, ainda que realmente precisassem do conhecimento substantivo daquilo que ensinavam, isso não era suficiente para capacitá-los para ensinar. Essa evidência foi associada ao discurso dos professores, como relatado na ênfase *percepções*, e à busca por referências para responder às questões e às reflexões que emergiram da discussão. Inicialmente os professores recorriam quase que exclusivamente a livros texto de ensino básico. No entanto, à medida que as questões eram ampliadas em aprofundamento conceitual e em relações com outros assuntos, os textos de ensino superior eram necessários e preponderantes. Ainda que as questões envolvessem o ensino dos assuntos na educação básica, as respostas não estavam mais nos livros didáticos. Essa mudança de atitude teve sua culminância na ênfase *vínculos*.

O fato de a formação acadêmica desconectada da prática levar a uma mutilação da formação profissional do professor foi associado à dupla descontinuidade, denunciada por Klein (2009). A análise dos dados, especialmente da entrevista, demonstrou que todos os professores participantes reconheciam, em alguma medida, a dupla descontinuidade em sua formação. Entendemos que a conscientização desses aspectos sobre a sua formação e sobre o seu conhecimento de matemática para o ensino pode conduzir (e, acreditamos, assim o foi para os professores participantes do presente estudo) mudanças de atitude dos professores frente à sua atividade como profissão especialmente em relação a dois aspectos:

(i) Conferir autoridade ao professor na condução da sua formação, visando a um desenvolvimento profissional permanente,

(ii) Elevar a autoestima do professor por meio do reconhecimento de que existe um conhecimento de matemática para o ensino, que é próprio do professor, e que esse conhecimento não pode ser reduzido ao conhecimento de matemática de ensino básico e que também não pode ser concebido como uma versão diluída nem simplificada da matemática acadêmica.

Consonante com os resultados de Davis (2010), nossa investigação sugere uma mudança de atitude dos professores também em sua prática. Os participantes do estudo realizado manifestaram a intenção de estender a experiência investigativa com uma atitude em sua prática de sala de aula. Por exemplo, os professores revelaram estar efetivamente mais atentos aos discursos, raciocínios e dificuldades de seus alunos, praticando de forma intencional o questionamento dos resultados. A professora Catarina relatou que, depois que ela se tornou mais consciente de suas próprias dúvidas sobre a operação de divisão, ela estava mais confiante para identificar e para lidar com as dificuldades dos seus alunos. Para ela, a reflexão coletiva levou-a a reconhecer o valor elementar da interpretação da divisão como medida para a compreensão dos números racionais. Assim, a reconstrução dos saberes docente a partir de um *concept study* mostra potencial para alcançar as práticas de sala de aula.

Essa constatação fica evidenciada no depoimento da professora Débora, que estava entre aqueles com maior tempo de experiência em sala de aula, enviado à pesquisadora após a conclusão do estudo:

> "Um aluno do 7º ano me perguntou a diferença entre razão e fração? Lembrei de vc e de nossas aulas na hora.... Sinto muita saudade de **nossas conversas, discussões e reflexões, que com certeza fazem toda a diferença em minha prática hoje**." (Negrito nosso)

No entanto, de fato, essa metodologia, por si só, não permite rastrear o impacto dos resultados na prática de sala de aula dos professores participantes e em relação a seus alunos. Este é um tema interessante para futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

BALL, D. L. e BASS, H. (2003). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In Davis, D. e Simmt, E. (Ed.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

BALL, D. L., THAMES, M. H. e PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

DAVIS, B. e SIMMT, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 61, No. 3, pp. 293-319. Springer.

DAVIS, B. (2010). Concept Studies: Designing settings for teacher's disciplinary knowledge. *Proceedings of the 34th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Minas Gerais, Brasil, 1, pp.63-78.

DAVIS, B. (2012) Subtlety and Complexity of Mathematics Teacher's Disciplinary Knowledge. *12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea.

DAVIS, B. e REBERT, M. (2014). *The Math Teachers Know – Profound understanding of Emergent Mathematics*. New York, NY: Routledge.

DOERR, H. M. (2004). Teachers' Knowledge and Teaching of Algebra. In: STANCEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*. New York : Kluwer Academic Publishers, p. 267 - 289.

EVEN, R. e BALL, D. (Eds.). (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics – The 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

FERNANDEZ, C. e YOSHIDA, M. (2004) *Lesson Study: a Japonese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

FIORENTINI, D., MISKULIN, R., MEGID, M. A., BRUM, E. D., GAMA, R. P., MELO, M. V., REIS, M. E., GRANDO, R. C., PASSOS, C. L. B. (2005) Learning through collaboration from professional with different. *ICMI 15th*. Prop. Disponível em: http://www.mathunion.org/icmi/digital-library/icmi-study-conferences/icmi-study-15-conference/. Acesso em maio de 2013.

FIORENTINI, D. (2006) Grupo de Sábado – Uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a própria prática escolar em matemática. In: CRISTOVÃO, E.M., FIORENTINI, D. (org) *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas, SP. Editora Alínea.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. (2009) *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3a ed. Rev. Campinas, SP. Autores Associados.

FIORENTINI, D. (2012) Investigar e Aprender em Comunidades Colaborativas. XVI ENDIPE – *Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino* – UNICAMP – Campinas, 2012. (disponível em: http://www.infoteca.inf.br/endipe/smarty/templates/arquivos_template/upload_arquivos/acervo/docs/0091s.pdf – Acesso em maio de 2013.

FIORENTINI, D. (2013) Learning and Professional Development of the Mathematics Teacher in Research Communities. *Sisyphus – Journal of Education*, v.1, issue 3,pp. 152-181

FIORENTINI, D. e OLIVEIRA, A. T. (2013) O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez.

KILPATRICK, J. (2008). A Higher Standpoint. *Proceedings ICME 11*, Disponível em: http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/About_ICMI/Publications_about_ICMI/ICME_11/Kilpatrick.pdf – Acesso em setembro de 2014.

KLEIN, F. (2009). *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

MOREIRA, P C. (2004) *O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica*. Minas Gerais. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social, Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. (2007) A formação matemática do professor : licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica. *Coleção Tendências em Educação Matemática*. (1ª reimpressão)

NODDINGS, N. (1992). Professionalization and Mathematics Teaching In: GROUWS, D. (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 197-208). New York, NY: Macmillan.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. (2014). Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações. *Professor de Matemática Online* – SBM. No. 1, v.2. ISSN 2319-023

RIBEIRO, C. M. (2009) Conhecimento matemático para ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 34, pp.1-26.

RIBEIRO, A. J. (2012). Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema*. Rio Claro (SP), v. 26, pp. 535-558.

SHULMAN, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Vol.15, pp.4-14.

SHULMAN, L. (1987) Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Havard Educational Review*, 1997, v. 57, pp. 1–22.

SILVERMAN, J. & THOMPSON, P. (2008) Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 11, Issue 6, November, 2008. Springer.

SCHUBRING, Gert. (2014). A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade. In ROQUE, T, & GIRALDO, V. (Eds.), *O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo*. Cap.2 – pp. 39–54. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

USISKIN, Z., PERESSINI, A., MARCHISOTTO, E. A. e STANLEY, D. (2003) *Mathematics for high school teachers: an advanced perspective*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Submetido: fevereiro de 2015

Aceito: junho de 2015